Inżynieria Danych 2019 **Algorytmy grafowe** **Lista 1**

Przypomnienie podstawowych pojęć z teorii grafów

Dla podanych poniżej grafów G_1–G_5, rozwiązać zadania 1–4.

$G_1 = (\{v_1, v_2, \ldots, v_6\},$
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\})$
$G_2 = (\{v_1, v_2, \ldots, v_{10}\},$
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_8\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_9\}, \{v_5, v_{10}\}, \{v_6, v_8\}, \{v_6, v_9\},$
$\{v_7, v_9\}, \{v_7, v_{10}\}, \{v_8, v_{10}\}\})$
$G_3 = (\{v_1, v_2, \ldots, v_8\},$
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_6\}, \{v_1, v_8\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_7\}\})$
$G_4 = (\{v_1, v_2, \ldots, v_8\},$
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_8\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_8\}, \{v_6, v_7\}, \{v_7, v_8\}\})$
$G_5 = (\{v_1, \ldots, v_6\},$
$\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_6\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5\}\})$

1. Wskazać, które z powyższych grafów to grafy proste. Podać liczby wierzchołków i krawędzi, wskazać w każdym z tych grafów (o ile istnieje): drogę długości 4, łańcuch długości 8 , cykle długości 3, 4.

2. Wyznaczyć w grafie G_1 następujące podgrafy (o ile istnieją): podgraf rozpinający rozmiaru 4, podgraf rozpinający, będący grafem 2-regularnym, drzewo rozpinające, podgraf indukowany przez zbiór wierzchołków S, dla następujących zbiorów S: $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$.

3. Podać maksymalny i minimalny stopień wierzchołka w grafie G_i. Określić, czy G_i to graf regularny i wyznaczyć ciąg stopni wierzchołków grafu G_i (dla $i = 1, \ldots, 5$).

4. Wskazać, który z grafów G_i $(i = 1, \ldots, 5)$ jest prosty, spójny, dwudzielny, jest drzewem.

5. Dla tych grafów G_i $(i = 1, \ldots, 5)$, które są proste, wyznaczyć dopełnienie $\overline{G_i}$.

   Reprezentacje grafów

6. Dane są macierze sąsiedztw grafów $G_i = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_{|V(G_i)|}\}$ $(i = a, b, c)$:

   (a) $\mathbf{A}(G_a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\mathbf{A}(G_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $\mathbf{A}(G_b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Dla grafów G_a, G_b i G_c, podać liczbę wierzchołków i krawędzi grafu, znaleźć macierz incydencji grafu oraz listy incydencji, podać maksymalny i minimalny stopień wierzchołka, wyznaczyć ciąg stopni wierzchołków.

7. Dana jest macierz incydencji grafu $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_6\}$: $\mathbf{M}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Znaleźć macierz sąsiedztw $\mathbf{A}(G)$ grafu G, podać listy incydencji tego grafu.

   Podstawowe klasy grafów

8. Przedstawić graficznie grafy K_n, $\overline{K_n}$, P_n, C_n , $\overline{P_n}$, $\overline{C_n}$ (dla $n = 1, \ldots, 5$), $K_{s,t}$ (dla $1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 4$). Dla każdego z nich wyznaczyć liczbę wierzchołków, liczbę krawędzi, minimalny i maksymalny stopień wierzchołka.

   Własności grafów i drzew

9. Uzasadnić, czy prawdziwe jest stwierdzenie: Jeżeli u, v są jedynymi wierzchołkami stopnia nieparzystego w grafie G, to w G istnieje droga z u do v.

10. Pokazać, że jeżeli w grafie T każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną drogą to (1) T nie zawiera cyklu; (2) T jest drzewem.

11. Uzasadnij stwierdzenie: Każde drzewo ma co najmniej dwa liście. (*Liść* to wierzchołek stopnia 1 (inaczej, *wierzchołek wiszący lub zależny*).)

12. Podaj charakteryzację drzew wykorzystującą powyższą własność. Zaproponuj algorytm sprawdzania, czy dany graf jest drzewem na podstawie podanej charakteryzacji.

13. Wykazać, że las T mający k składowych spójności posiada $|V(T)| - k$ krawędzi.

   Grafy skierowane (digrafy)

   $D_1 = (\{v_1, v_2, \ldots, v_6\},$
   $\{(v_1, v_6), (v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_3, v_4), (v_5, v_4), (v_6, v_4), (v_6, v_5)\})$.

   $D_2 = (\{v_1, v_2, \ldots, v_7\},$
   $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_3, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_5)\})$.

   $D_3 = (\{v_1, v_2, \ldots, v_8\},$
   $\{(v_1, v_3), (v_1, v_7), (v_1, v_8), (v_2, v_7), (v_3, v_8), (v_4, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_3), (v_6, v_1), (v_6, v_2), (v_6, v_3), (v_8, v_7)\})$.

14. Dla podanych digrafów D_1, D_2 i D_3 wskazać: cykl (skierowany) długości 3, 4, drogę (skierowaną) długości 4, ciągi stopni wejścia wierzchołków ($indeg(v)$) oraz stopni wyjścia ($outdeg(v)$). Wskaż, o ile istnieją, wierzchołki o stopniu wejścia 0 (*źródło*), o stopniu wyjścia 0 (*ujście*). Wyznacz macierze sąsiedztw oraz listy incydencji tych digrafów.

15. Dla digrafów D_1, D_2 i D_3 odpowiedz na pytanie, czy dany digraf jest acykliczny (*dag*) i dla każdego dag wyznacz sortowanie topologiczne. Zastosuj odpowiedni algorytm.