Minimalne drzewa rozpinające w grafach ważonych. Algorytmy: Prim-Jarnik-Dijkstra, Kruskal

1. Opisać zasadę działania algorytmu wyznaczania minimalnego drzewo rozpinającego (MST) za pomocą (a) algorytmu Prima (b) algorytmu Kruskala na przykładzie grafu H z rysunku oraz grafu $G = (V, E, w)$: $V = \{1, 2, \ldots, 8\}$,

   $E = \{\{1, 2\}, 3, \{1, 4\}, 3, \{1, 5\}, 1, \{2, 3\}, 2, \{3, 5\}, 1, \{3, 4\}, 4, \{4, 6\}, 2, \{4, 7\}, 1, \{5, 6\}, 5, \{5, 7\}, 2, \{5, 8\}, 3, \{6, 8\}, 1, \{7, 8\}, 4\}$.

2. Udowodnij, że można przeskalować wagi przez dodanie do każdej z nich dodatniej stałej lub pomnożenie ich przez taką stałą i że nie wpływa to na drzewo MST.

3. Uzasadnij, czy graf ważony ma unikalne drzewo MST tylko wtedy, gdy wagi krawędzi są różne. Przedstaw dowód lub kontrprzykład.

4. Załóżmy, że krawędzie w grafie mają różne wagi. Czy najkrótsza krawędź (czyli krawędź o najmniejszej wadze) musi należeć do drzewa MST? Czy najdłuższa krawędź może należeć do drzewa MST? Uzasadnij odpowiedź na każde pytanie lub przedstaw kontrprzykład.

5. Przedstaw kontrprzykład pokazujący, dlaczego opisana strategia nie zawsze wyznacza drzewo MST. Oto ta strategia: zacznij od dowolnego wierzchołka traktowanego jak drzewo MST o jednym wierzchołku. Następnie dodaj do niego $V - 1$ krawędzi, zawsze pobierając następną krawędź o minimalnej wadze przyległą do wierzchołka dodanego w ostatnim kroku do drzewa MST.

6. (*) Minimalny las rozpinający. Opracuj wersję algorytmu Prima wyznaczającą minimalny las rozpinający dla grafu ważonego, który może być niespójny. Wskazówka: wyznacz drzewo MST dla każdej składowej grafu.