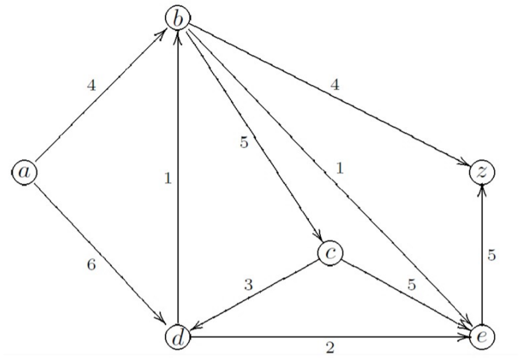
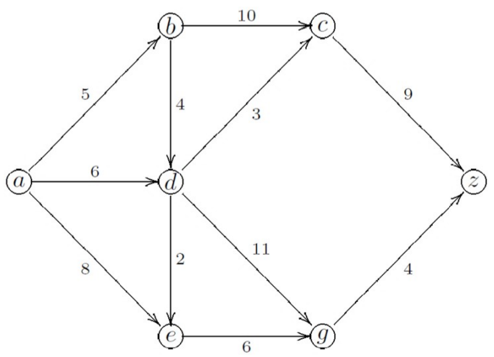
Przepływy w sieciach

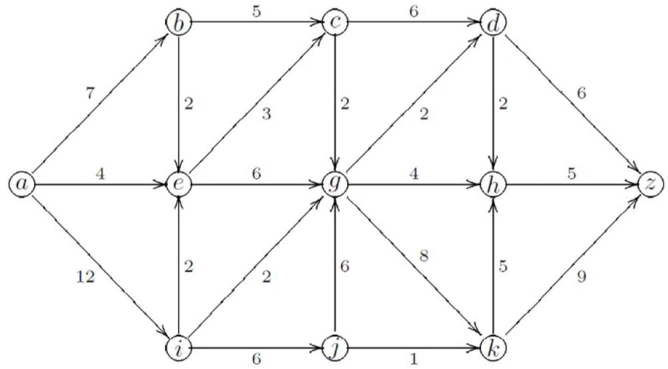
1. Dla sieci $N = (H, a, z, c)$ podaj:
   (a) dowolny przepływ ze źródła $a$ do ujścia $z$;
   (b) przepustowość przekroju określonego przez zbiór $S$, dla podanych zbiorów $S$: $\{a, b, c, d\}, \{a, b, d, e\}, \{a, e\}$;
   (c) wartość $F(f)$ podanego przepływu;
   (d) jeżeli przepływ $f$ nie jest maksymalny, to znajdź dowolną ścieżkę powiększającą i określ wartość przepływu skonstruowanego z wykorzystaniem tej ścieżki.
2. Uzasadnij, że jeżeli w sieci $s$ jest źródłem (i nie ma łuków wchodzących), $t$ jest ujściem (i nie ma łuków wychodzących), to dla dowolnego przepływu $f$, przepływ wyjściowy ze źródła $s$ jest równy przepływowi wejściowemu do ujścia $t$.
3. Dla sieci $N_1$ wykorzystaj algorytm Forda-Fulkersona do skonstruowania maksymalnego przepływu. Czy jeżeli wartości przepustowości łuków nie są całkowite, to algorytm ten też musi wskazać maksymalny przepływ?
4. Dla sieci $N_2$ wykorzystaj algorytm Edmondsa-Karpa do skonstruowania maksymalnego przepływu. (Jako punkt startowy przyjmij przepływ $f$ zdefiniowany jako $f(a, i) = f(i, j) = f(j, g) = f(g, k) = f(k, h) = f(h, z) = 5$, $f(x, y) = 0$ dla pozostałych łuków.)
5. Uzasadnij, czy prawdziwe są stwierdzenia:
   (a) Jeżeli przepustowości wszystkich łuków są różne, to przepływ maksymalny jest tylko jeden.
   (b) Jeżeli przepustowości wszystkich łuków zostaną zwiększone o stałą dodatnią, to przekrój minimalny pozostanie nie zmieniony.
   (c) W przepływie maksymalnym nie występują cykle skierowane, w których każda krawędź ma dodatni przepływ.
   (d) Istnieje przepływ maksymalny, w którym nie występuje cykl skierowany obejmujący same krawędzie o przepływie dodatnim.


a
b
c
d
e
z
4
6
1
5
1
4
3
5
5
2

$N$


a
b
c
d
e
g
z
5
6
8
10
4
3
2
11
6
9
4

$N_1$


a
b
c
d
e
g
h
i
j
k
z
7
4
12
5
6
2
3
2
2
2
6
6
4
5
2
2
6
8
5
9
6
1

$N_2$