1. Ile jest liczb 11-cyfrowych? Ile jest liczb n-cyfrowych dla $n > 1$?
2. Ile jest liczb 11-cyfrowych, w których nie występują obok siebie dwie jednakowe cyfry? Ile jest liczb n-cyfrowych, dla $n > 1$, w których nie występują obok siebie dwie jednakowe cyfry?
3. Ile jest liczb zbioru $[1, 10^n]$, $n > 1$, w których nie występują obok siebie dwie jednakowe cyfry?
4. Ile jest liczb 11-cyfrowych, które niezależnie od kierunku czytania przedstawiają tę samą liczbę? Ile jest liczb n-cyfrowych, $n > 1$, które niezależnie od kierunku czytania przedstawiają tę samą liczbę?
5. Tworzymy uporządkowane pary z liter słowa EKONOMETRIA.
   (a) Ile jest par złożonych z różnych liter?
   (b) Ile jest par, których pierwszym elementem jest spółgłoska a drugim samogłoska?
   (c) Ile będzie takich par, jeżeli zamiast słowa EKONOMETRIA weźmiemy słowo MATEMATYKA?
6. Iloma sposobami można rozdzielić trzy bilety między 5 osób
   - na ten sam koncert,
   - na różne koncerty.
7. Trzy dziewczynki i czterech chłopców mają zamiar przejść przez łąkę "gęsiego". Na ile sposobów mogą ustawić się, jeżeli dziewczynki i chłopcy mają stać naprzemiennie?
8. Na kluczu wyżłobionych jest 6 rowków. Każdy z rowków ma głębokość od 0 do 1mm, ze skokową zmianą głębokości o $0,1$mm. Ile różnych kluczy można wyprodukować przy tych założeniach?
9. Na ile różnych sposobów można umieścić w pionowej kolumnie 11 flag, z których 3 są białe, 4 żółte i 4 niebieskie?
10. Na ile sposobów można wybrać z talii 52 kart 6 kart tak, aby wśród nich były dokładnie dwa piki?
11. Na ile sposobów można wybrać z talii 52 kart 6 kart tak, aby wśród nich były co najmniej dwa piki?
12. Z talii 52 kart losujemy karty ze zwracaniem. W wyniku notujemy, którą kartę wylosowaliśmy w którym ruchu. Na ile sposobów można wylosować 5 kart tak, aby piąta karta nie wystąpiła wcześniej?
13. Na ile sposobów z talii 52 kart można wylosować kolejno bez zwracania cztery karty tak, aby pierwsza karta była asem, druga karta była królem, trzecia karta nie była koloru kier a czwarta była koloru kier?
14. Na ile sposobów można wybrać 6 kart z talii 52 kart tak, aby wśród nich były karty wszystkich czterech kolorów?
15. Na ile sposobów można wybrać cztery spośród liczb zbioru [123] tak, aby ich suma była parzysta?
16. Na ile sposobów można trafić dokładnie 3-ę w TOTO LOTKA (losowanie już miało miejsce)?
17. Na ile sposobów można trafić dokładnie k-ę w TOTO LOTKA, $k \in [0, 6]$ (losowanie już miało miejsce)?
18. Na ile sposobów można trafić co najmniej k-ę w TOTO LOTKA, $k \in [0, 6]$ (losowanie już miało miejsce)?
19. Ile jest różnych rozkładów kart w rozgrywce brydżowej, jeżeli gracze siedzą już na miejscach?
20. Ile liczb 11-o cyfrowych można utworzyć z cyfr $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 6$?

21. Ile jest rozwiązań równania $x_1 + \ldots + x_n = k$, jeżeli $n, k \in N$, $x_i \in N_0$ oraz

   - $x_i \geqslant 0$, $i \in [n]$,
   - $x_i \geqslant 1$, $i \in [n]$.

22. Ile jest liczb n-cyfrowych, których suma cyfr jest mniejsza niż k, gdzie $k \in [1, 10]$?

23. Ile jest liczb n-cyfrowych, w których cyfry są ustawione w porządku niemalejącym? Ile jest liczb n-cyfrowych, w których cyfry są ustawione w porządku nierosnącym?

24. Student zdaje trzyczęściowy egzamin z matematyki dyskretnej. W każdej z tych części może uzyskać od 0 do 15 punktów. Na ile różnych sposobów student może zdać egzamin, jeżeli musi uzyskać co najmniej 2 punkty z każdej części oraz liczba punktów z części pierwszej nie może być mniejsza od liczby punktów uzyskanej z części trzeciej, a ta z kolei od tej uzyskanej z części drugiej?

25. W pewnym urzędzie zorganizowano konferencję prasową i zaproszono na nią 15 urzędników, którzy mieli odpowiadać na zadawane na niej pytania. Za stołem ustawiono w rzędzie 15 krzeseł. Okazało się, że 4 osoby zachorowały i na konferencję przyszło tylko 11 urzędników. Na ile różnych sposobów można posadzić urzędników za stołem?

26. Przypuśćmy, że 73 jednakowe kulki zostały umieszczone w 8 różnych pudełkach.

   (a) Wykazać, że jedno z pudełek zawiera co najmniej 10 kulek.

   (b) Wykazać, że jeżeli dwa pudełka są puste, to jedno z pudełek zawiera co najmniej 13 kulek.

27. Niech A będzie dowolnym 10-o elementowym podzbiorem zbioru $[50]$. Pokazać, że w A istnieją dwa różne 5-o elementowe podzbiory, których sumy elementów są równe.

28. W rozgrywkach piłki nożnej uczestniczy n drużyn. Każde dwie spośród nich rozgrywają jeden mecz. W kolejnych dniach mecze są rozgrywane według wcześniej określonego grafiku. Pokazać, że niezależnie od planu rozgrywek, w dowolnym momencie trwającego turnieju istnieją co najmniej dwie drużyny, które rozegrały dotychczas taką samą liczbę meczy.

29. W klasie jest 30 uczniów. Wojtek w dyktandzie popełnił 13 błędów, a pozostali mniej niż on. Wykazać, że w klasie jest co najmniej trzech uczniów, którzy popełnili w dyktandzie tyle samo błędów.

30. W pola tablicy rozmiaru n na n wpisano liczby: $-1, 0, 1$ w sposób całkowicie dowolny. Czy może zdarzyć się, że wszystkie sumy liczb liczone pionowo, poziomo i po przekątnych są różne?

31. Niech A będzie 25-elementowym podzbiorem zbioru $[150]$. Wykazać, że istnieją dwa rozłączne podzbiory dwuelementowe zbioru A, mające te same sumy elementów.

32. Udowodnić, że dla dowolnych n dodatnich liczb całkowitych istnieje podzbiór zbioru tych liczb, którego suma elementów jest podzielna przez n.

33. Danych jest $n + 1$ różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych bądź równych $2n$. Pokazać, że:

   - istnieje para liczb, których suma wynosi $2n + 1$,
   - istnieją dwie liczby, które są względnie pierwsze.

34. Pokazać, że wśród dowolnie wybranych 12 liczb dwucyfrowych istnieje zawsze taka para tych liczb, że ich różnica jest liczbą, której cyfry dziesiątek i jedności są takie same.

35. Wybieramy losowo liczbę ze zbioru [10000]. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że jest to liczba:
    - podzielna przez 7 lub 11,
    - niepodzielna przez 7 lub przez 11,
    - podzielna przez co najmniej jedną z liczb: $7, 11, 5$,
    - niepodzielna przez co najmniej jedną z liczb: $5, 7, 11$.
36. W ilu permutacjach cyfr $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ pierwsza cyfra jest większa niż 1 a ostatnia nie większa niż 8?
37. W ilu permutacjach liter: a,a,b,b,b,c,d,e,f,g,h,k,k,k,k nie pojawi się sylaba *def*?
38. W ilu permutacjach liter: a,a,b,b,b,c,d,e,f,g,h,k,k,k,k nie pojawi się sylaba *hag*?
39. W ilu permutacjach liter: a,a,b,b,b,c,d,e,f,g,h,k,k,k,k nie pojawi się sylaba *def* i nie pojawi się sylaba *hag*?
40. Na półce stoi n książek w porządku alfabetycznym według nazwisk autorów. Na ile sposobów można poprzestawiać książki tak, aby żadna nie stała na swoim pierwotnym miejscu?
41. Pokazać, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia, że żadna książka nie stoi na swoim miejscu, jeżeli książki przestawiano losowo w poprzednim zadaniu, dąży do liczby $\frac{1}{e}$ przy n zbiegającym do nieskończoności.
42. Kamińscy, Nowakowie i Malinowscy mają po pięcioro dzieci. Cała 15 biwakuje w 5 trzyosobowych namiotach rozbitych nad pewnym jeziorem. Przyjmując, że rozmieszczenie dzieci jest przypadkowe, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że każda rodzina ma co najmniej dwoje dzieci w tym samym namiocie.
43. Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 2340, które są względnie pierwsze z liczbą 2340?
44. Niech X będzie niepustym skończonym zbiorem. Pokazać, że rodzina podzbiorów zbioru X o parzystej liczbie elementów ma taką samą moc, jak rodzina podzbiorów tego zbioru o nieparzystej liczbie elementów (0 jest liczbą parzystą).
45. Udowodnić następujące tożsamości (jeżeli to możliwe, podać uzasadnienie kombinatoryczne):
    (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
    (b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $k \leqslant n$,
    (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$,
    (d) $\binom{m+n}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r}$,
    (e) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $n, k > 0$,
    (f) $\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$.

Literatura:

- V. Bryant, *Aspekty kombinatoryki*, WNT, Warszawa 1997.
- W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów*, WNT, Warszawa 2004.
- W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.
- Z. Palka, A. Ruciński, *Wykłady z kombinatoryki cz. I*, WNT, Warszawa 1998.
- K.A. Ross, C.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa 2011.
- R.J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, Warszawa 1998.