Matematyka Dyskretna I, lista 2

1. Podać wzór jawny na a_n, jeżeli ciąg ten jest zadany zależnością rekurencyjną: $a_n = 5a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $n \geqslant 2$ oraz $a_0 = 0$, $a_1 = 5$.

2. Niech a_n będzie liczbą ciągów ternarnych, w których żadne dwie jedynki i żadne dwie dwójki nie stoją obok siebie. Podać zależność rekurencyjną rozwiązującą ten problem a następnie znaleźć wzór jawny.

3. Niech a_n będzie liczbą ciągów ternarnych, w których żadne dwie jedynki lub żadne dwie dwójki nie stoją obok siebie. Znaleźć wzór jawny na a_n.

4. Ile jest uporządkowanych trójek (A_1, A_2, A_3) takich, że $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [n]$?

5. Znaleźć zależność rekurencyjną dla liczby sposobów połączeń w pary wierzchołków wypukłego $2n$-kąta przy pomocy nieprzecinających się odcinków (boki, przekątne).

6. Bank w skali roku daje zysk 10%. Znaleźć zależność rekurencyjną dla kwoty, którą uzyska się w tym banku po n latach, jeżeli będzie się wpłacać po 100zł na początku każdego roku. Następnie podać wzór jawny opisujący to zagadnienie.

7. Niech dana będzie liczba naturalna k. Znaleźć zależność rekurencyjną dla liczby obszarów, na jakie dzieli płaszczyznę $n \geqslant k$ prostych, z których k jest równoległych a pozostałe przecinają wszystkie proste (żadne trzy proste nie przecinają się w jednym punkcie). Podać wzór jawny rozwiązujący to zagadnienie.

8. Na ile różnych sposobów można wciągnąć na n-metrowy maszt flagi trzech kolorów, jeżeli flagi czerwone mają szerokość dwóch metrów a pozostałe jednego metra?

9. Pewna cząsteczka porusza się w kierunku poziomym i w każdej sekundzie pokonuje odległość równą podwojonej odległości pokonanej w sekundzie poprzedzającej. Niech a_n oznacza pozycję cząsteczki po n sekundach. Określić a_n wiedząc, że $a_0 = 3$ oraz $a_3 = 10$.

10. Wewnątrz reaktora jądrowego dane są dwa rodzaje cząsteczek: typu α oraz typu β. W każdej sekundzie cząstka β rozpada się na trzy cząstki typu α, a cząstka α na jedną cząstkę α i dwie cząstki β. Jeżeli umieścimy w reaktorze jedną cząstkę β w chwili początkowej ($t = 0$), to ile będzie cząstek α po czasie $t = 2011$?

11. Znaleźć funkcję tworzącą dla liczby wyborów p ($p = 0, 1, 2, \ldots, 29$) kul spośród 7 kul zielonych, 8 kul niebieskich i 14 kul czerwonych.

12. Znaleźć funkcję tworzącą dla liczby rozwiązań równania $21x+5y+17z = n$ w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych spełniających warunki $2 \leqslant x \leqslant 11$, $1 \leqslant y \leqslant 7$, $z > 4$.

13. Na ile różnych sposobów można uzyskać sumę 71 oczek na 11 różnych kostkach do gry?

14. Użyć funkcji tworzącej w celu określenia liczby n-elementowych kombinacji liter B,C,D,E,F (powtórzenia są możliwe), w których litery B i E mogą powtarzać się co najwyżej 2 razy, a pozostałe dowolną ilość razy. Jaka będzie dokładna odpowiedź dla $n = 5$?

15. Znaleźć funkcję tworzącą dla liczby sposobów przedstawienia liczby całkowitej dodatniej n jako sumy dodatnich liczb całkowitych, z których żadna nie występuje w tej sumie więcej niż cztery razy, przy czym składniki podzielne przez trzy mogą wystąpić co najwyżej raz.

16. Na ile różnych sposobów można zbudować wieżę z 2010 klocków wysokości 1, mając do dyspozycji 49 klocków czerwonych, 101 klocków żółtych i 1859 niebieskich?

17. Rozwiązać powyższe zadanie z założeniem, że liczby klocków we wszystkich trzech kolorach są nieograniczone.

18. Rozwiązać powyższe zadanie z założeniem, że w wieży nigdy klocek niebieski nie sąsiaduje z czerwonym oraz liczby klocków we wszystkich kolorach są nieograniczone.