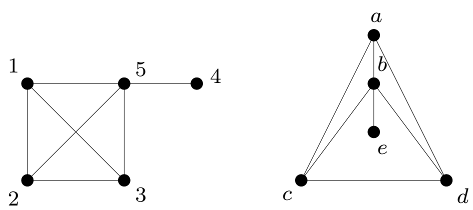
1. Dane jest drzewo $T = (V, E)$, gdzie $V = [8]$, $E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,6\},\{2,7\},\{3,4\},\{3,8\},\{4,5\}\}$. Narysować trzy różne drzewa uporządkowane z wyróżnionym korzeniem, o różnej wysokości izomorficzne z T. Podać wysokość każdego z tych drzew oraz numer poziomu wierzchołka 3.

2. Znaleźć liczbę wierzchołków drzewa pełnego binarnego T o danej wysokości h.

3. Pokazać, że liczba wierzchołków drzewa binarnego jest zawsze nieparzysta.

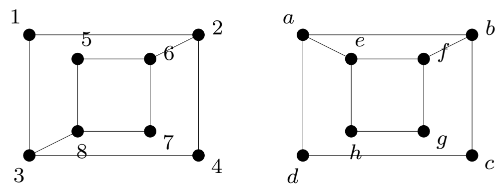
4. Niech T będzie drzewem binarnym mającym t wierzchołków wewnętrznych i p liści. Pokazać, że $p = t+2$ niezależnie od tego, jaka jest wysokość drzewa T.

5. Które z podanych par grafów są izomorficzne? Podaj odpowiedni izomorfizm lub udowodnij nieizomorficzność grafów.



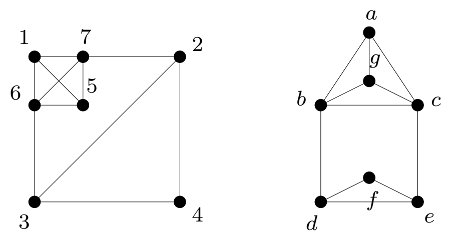
G_1 G_2

(1)



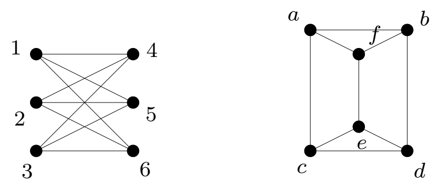
G_1 G_2

(2)



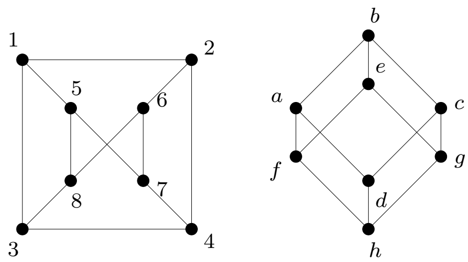
G_1 G_2

(3)



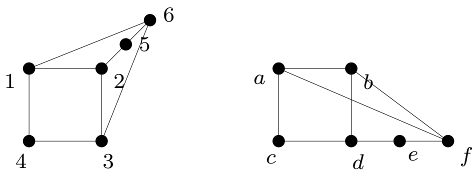
G_1 G_2

(4)



G_1 G_2

(5)



G_1 G_2

(6)

6. Znaleźć $\kappa(G)$ i $\lambda(G)$ dla: P_7, $K_{1,4}$, $\overline{P_4}$, $\overline{P_5}$, graf Petersena, $K_5 - e$, $K_{1,3} + K_1$, W_5.

7. (a) Skonstruować graf G_1, dla którego zachodzi $\delta(G_1) > \lambda(G_1) > \kappa(G_1)$.

(b) Skonstruować graf G_2, dla którego zachodzi $\delta(G_2) = \lambda(G_2) = \kappa(G_2)$.

(c) Skonstruować graf G_3, dla którego zachodzi $\delta(G_3) = 6$, $\lambda(G_3) = 4$, $\kappa(G_3) = 1$.

8. Niech G będzie grafem regularnym stopnia r oraz $\kappa(G) = 1$. Pokazać, że $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor \geqslant \lambda(G)$.

9. Pokazać, że jeżeli G jest grafem spójnym o $2d + 1$ wierzchołkach, z których każdy jest stopnia d, to G jest grafem eulerowskim. Czy założenie spójności można opuścić?

10. Opisać zasadę działania algorytmu wyznaczania zamkniętego łańcucha Eulera na przykładzie grafu $G = (V, E)$:

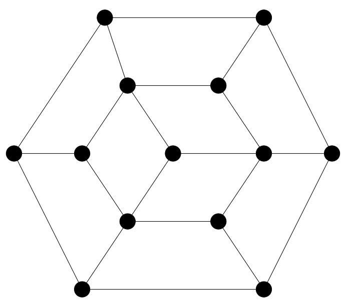
    (a) $V = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{5, 4\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{7, 8\}\}$.

    (b) $V = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$, $N(1) = \{4, 5, 8, 10\}$, $N(2) = \{3, 5, 8, 10\}$, $N(3) = \{2, 4, 6, 10\}$, $N(4) = \{1, 3, 5, 6\}$, $N(5) = \{1, 2, 4, 8\}$, $N(6) = \{3, 4, 7, 10\}$, $N(7) = \{6, 8\}$, $N(8) = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$, $N(9) = \{8, 10\}$, $N(10) = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$.

    (c) $V = \{1, 2, \ldots, 11\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 11\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 11\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{4, 10\}, \{4, 11\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{10, 11\}\}$.

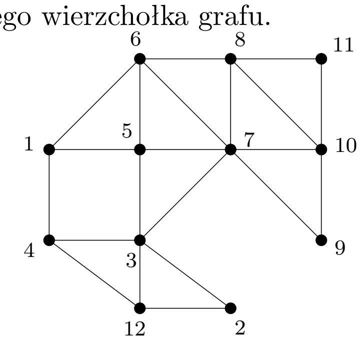
11. Które z grafów wskazanych poniżej są hamiltonowskie, a które posiadają drogę Hamiltona?
(a) K_5, (b) $K_{2,3}$, (c) graf ośmiościanu foremnego, (d) W_6, (e) $P_4 + K_1$?

12. Pokazać, że graf G_1, przedstawiony na rysunku poniżej, nie jest grafem hamiltonowskim.



G_1

13. Poniżej podano geometryczną interpretację grafu G. Opisać działanie algorytmu znajdowania cyklu Hamiltona w G, startując z dowolnego wierzchołka grafu.



G_2

14. Podać przykłady (o ile istnieją) grafu Eulera, który nie jest grafem Hamiltona, i odwrotnie.

15. Dla jakich n, m, grafy K_n, W_n, $K_{m,n}$ są

    - eulerowskie,
    - hamiltonowskie.

16. Podać przykład grafu Hamiltona o 10 wierzchołkach, który nie spełnia założeń twierdzenia Ore.