1. Czy następujące grafy są planarne? Jeżeli tak, to narysować ich płaskie reprezentacje, przeciwnie udowodnić, że dany graf nie jest planarny. (W punktach (a), (b), (c) dane są macierze sąsiedztw grafu.)

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $V = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $N(1) = \{3, 4, 5, 6, 8\}$, $N(2) = \{4, 5, 6, 7\}$, $N(3) = \{1, 4, 5, 7\}$, $N(4) = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$, $N(5) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $N(6) = \{1, 2, 4, 8\}$, $N(7) = \{2, 3\}$, $N(8) = \{1, 4, 5, 6\}$,

(e) $V = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $N(1) = \{2, 3, 4, 7\}$, $N(2) = \{1, 5, 6\}$, $N(3) = \{1, 5, 6, 7, 8\}$, $N(4) = \{1, 5, 6, 7\}$, $N(5) = \{2, 3, 4, 7, 8\}$, $N(6) = \{2, 3, 4, 7, 8\}$, $N(7) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $N(8) = \{3, 5, 6\}$.

2. Które grafy pełne dwudzielne są planarne?

3. Dla jakich wartości r, s, t, graf pełny trójdzielny $K_{r,s,t}$ jest planarny?

4. Wykorzystać twierdzenie Eulera, aby udowodnić, że jeżeli G jest spójnym grafem planarnym o obwodzie 5 (obwód to długość najkrótszego cyklu w grafie), to

$$|E(G)| \leqslant \frac{5|V(G)| - 10}{3}.$$

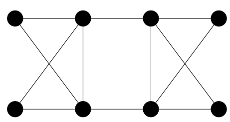
Wyprowadzić stąd wniosek, że graf Petersena nie jest planarny.

5. Pokazać, że jeżeli G jest grafem mającym co najmniej 11 wierzchołków, to G i $\overline{G}$ nie mogą być jednocześnie planarne.

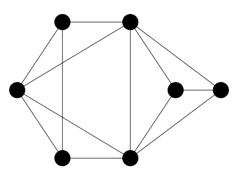
6. Wskazać graf 8-wierzchołkowy G taki, że G i jego dopełnienie są planarne.

7. Pokazać, że w dowolnym grafie planarnym istnieje wierzchołek stopnia co najwyżej 5.

8. Dla grafów z rysunku znaleźć ich grafy dualne geometrycznie.



G_1



G_2

9. Czy grafy geometrycznie dualne dwóch izomorficznych grafów muszą być izomorficzne?