

Matematyka (Zarządzanie)

Lista 2 - Ciągi liczbowe

1. Wypisać kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) , którego wyraz ogólny określony jest następującym wzorem:

a) $a_n = \frac{3}{n}$, b) $b_n = \frac{n+1}{n}$, c) $c_n = (-2)^n$, d) $d_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. Na podstawie znajomości kilku początkowych wyrazów ciągu znaleźć wzór na wyraz ogólny tego ciągu:

a) $(a_n) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$, b) $(b_n) = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots\right)$,
c) $(c_n) = (2, 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$, d) $(d_n) = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \dots\right)$,
e) $(e_n) = (2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots)$, f) $(f_n) = (-1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots)$.

3. Zbadać monotoniczność i ograniczoność ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{n}{n+1}$, b) $a_n = \frac{3^n}{3^n+2}$, c) $a_n = \frac{n^2+1}{n!}$,
d) $a_n = \cos \frac{\pi}{2n}$, e) $a_n = (-2)^n$, f) $a_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2-3}$.

4. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{n}{3n+1}$, b) $a_n = \frac{4n-3}{6-7n}$,
c) $a_n = \frac{n^2-1}{3+2n-n^2}$, d) $a_n = \frac{2n^2-4n+5}{6n+3n^2-4n^3}$,
e) $a_n = \frac{(n-1)(n+2)}{3n^2+1}$, f) $a_n = \frac{(n-6)^2}{(6-7n)(n+2)}$,
g) $a_n = \frac{3}{n} + \frac{6}{\sqrt{n+2}}$, h) $a_n = \frac{4n-3}{6-7n} - \frac{n}{8+n^3}$,
i) $a_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$, j) $a_n = \left(\frac{2n-1}{6+3n}\right)^2$,
k) $a_n = \left(\frac{5n-3}{3n+1}\right)^3$, l) $a_n = \left(\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}}\right)^4$.

5. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, b) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$,
c) $a_n = n - \sqrt{n^2+5n}$, d) $a_n = \sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}$,
e) $a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$, f) $a_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2-4} - \sqrt[3]{n^2+1}$.

6. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{4^n - 1}{2^{2n} - 7}$,

b) $a_n = \frac{5 \cdot 3^{2n} - 1}{4 \cdot 9^n + 7}$,

c) $a_n = \frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3}$,

d) $a_n = \frac{-8^{n-1}}{7^n}$,

e) $a_n = \frac{2^{n+1} - 3^{n+2}}{3^{n+2} + 1}$,

f) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1} - 1}{3^{n+2} - 1}$,

g) $a_n = \frac{2^n + 7^n}{4^n + 7^{n+1}}$,

h) $a_n = \frac{5^{n+3} - 5}{25^{n-n}}$,

i) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 7^n + e^n}$,

j) $a_n = \sqrt[n]{10^n + \pi^n}$,

k) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n}$,

l) $a_n = \sqrt[n]{3 + \sin n}$,

m) $a_n = \sqrt[n]{3n + \cos n}$,

n) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2 + \dots + n}$,

o) $a_n = \frac{3n + \cos^2 n}{2n + \sin n}$,

p) $a_n = \frac{4n^2 - \sin n}{4n^2 - n + \cos n}$.

7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$,

b) $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$,

c) $a_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$,

d) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}$.

8. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$,

b) $a_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$,

c) $a_n = \left(\frac{n}{n-5}\right)^{4n+1}$,

d) $a_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+2}$,

e) $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2-3}$,

f) $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+6}\right)^{3-2n^2}$.

9. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $x_n = \frac{\log_n n^3}{\log_8 n}$,

b) $x_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$,

c) $x_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$,

d) $x_n = \frac{8^{\log_2 n}}{4^n}$,

e) $x_n = \frac{n!}{n^n}$,

f) $x_n = \frac{2^n 3^{2n}}{n!}$,

g) $x_n = \frac{\cos^3 n}{2n}$,

h) $x_n = \frac{n \sin n!}{n^3 + 2}$.

10.* Uzasadnić, że ciąg o wyrazie ogólnym (b_n) nie ma granicy:

a) $b_n = (-1)^n$,

b) $b_n = (-1)^n + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

c) $b_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$,

d) $b_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$,

e) $b_n = \sin \frac{n\pi}{2}$,

f) $b_n = \cos n\pi$.