Matematyka (Zarządzanie)
Lista 4 - Granica i ciągłość funkcji

1. Obliczyć następujące granice

a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^4+3x^2-4}{x+1}$, b) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$, c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x+1}{x^5+x}$,

d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$, e) $\lim_{x\to 8} \frac{3-\sqrt{x+1}}{4-\sqrt{2x}}$, f) $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{2-\sqrt[3]{2x}}$,

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$, h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$, i) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$,

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{\sin x}$, k) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x-\cos x}$, l) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$,

m) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$, n) $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$, o) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$,

p) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$, r) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$, s) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$,

t) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$, u) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\mathrm{arctg}(1-2x)}{4x^2-1}$, w) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$,

x) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-5}$, y) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, z) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

2. Obliczyć granice jednostronne następujących funkcji w podanych punktach i rozstrzygnąć, czy funkcje te mają w tych punktach granice:

a) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ w punkcie $x=0$, b) $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}+x$ w punkcie $x=1$,

c) $f(x)=\frac{x}{x-2}$ w punkcie $x=2$, d) $f(x)=\mathrm{arctg}\frac{1}{1-x}$ w punkcie $x=1$.

3. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dla} \quad 0\le x\le 1, \\ 2-x^2, & \text{dla} \quad 1<x\le 2, \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi x}{2}, & \text{dla} \quad |x|\le 1, \\ |x-1|, & \text{dla} \quad |x|>1, \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}, & \text{dla} \quad x\ne 0, \\ 0, & \text{dla} \quad x=0, \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{dla} \quad x<0, \\ 0, & \text{dla} \quad x=0, \\ 1, & \text{dla} \quad x>0. \end{cases}$

4. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić ich rodzaj

a) $$f(x) = \begin{cases} -\log_{\frac{1}{2}}(x+3), & \text{dla} \quad -3 < x \le -2, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dla} \quad -2 < x \le 0, \\ \mathrm{arctg}\frac{1}{x}, & \text{dla} \quad 0 < x, \end{cases}$$

b) $$g(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, & \text{dla} \quad x \le 1, \\ x^2 + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x - \frac{\pi}{2}, & \text{dla} \quad -1 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \mathrm{ctg}x, & \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \\ 0, & \text{dla} \quad \pi < x < 2\pi, \\ |\sin x|, & \text{dla} \quad 2\pi \le x, \end{cases}$$

c) $$h(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & \text{dla} \quad x < -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{dla} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\mathrm{tg}x, & \text{dla} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 1, & \text{dla} \quad \pi \le x. \end{cases}$$

5. Dla jakich wartości parametru a dana funkcja jest ciągła w punkcie x_0?

a) $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dla} \quad |x| \le 1, \\ x^2 + ax + b, & \text{dla} \quad |x| > 1, \end{cases}$$

b) $$g(x) = \begin{cases} (1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x, & \text{dla} \quad x \ne 1, \\ 3 + a, & \text{dla} \quad x = 1, \end{cases}$$

c) $$h(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}x, & \text{dla} \quad x \ne \pi 2, \\ a + 1 & \text{dla} \quad x = \pi 2, \end{cases}$$

6. Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{dla} \quad -1 \le x < 0, \\ 0, & \text{dla} \quad x = 0, \\ x^3 - 1, & \text{dla} \quad 0 < x \le 1, \end{cases}$$

przyjmuje wartość największą i najmniejszą na $[-1, 1]$?