

Matematyka (Zarządzanie)
Lista 5 - Rachunek różniczkowy

1. Wykorzystując definicję pochodnej funkcji w punkcie obliczyć pochodną funkcji f w podanym punkcie x_0 :

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad x_0 = 1,$

b) $f(x) = |x|, \quad x_0 = 0,$

c) $f(x) = \sqrt{x-2}, \quad x_0 = 2,$

d) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$

2. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2},$

b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 3e^x - 4 \ln x,$

c) $f(x) = \sin x + \cos x,$

d) $f(x) = xe^x,$

e) $f(x) = 10x^3 \ln x,$

f) $f(x) = \sin x \cos x,$

g) $f(x) = \frac{5x^2+x-2}{x^2+7},$

h) $f(x) = \frac{x \sin x}{1+\tan x},$

i) $f(x) = \sqrt{7x^4 + 2x^2 - 6},$

j) $f(x) = \arcsin(3x - 8),$

k) $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt[5]{4x^3+3x}},$

l) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}},$

ł) $f(x) = \cos(2x + 5),$

m) $f(x) = e^{x^2} \log_3 x,$

n) $f(x) = \ln(x + \sin 4x),$

o) $f(x) = \cos^2(6x^4 - 5x - 2),$

p) $f(x) = x^x,$

q) $f(x) = (\sin x)^{2x+1},$

r) $f(x) = (10x)^{-5x^3-2x},$

s) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

3. Wyznaczyć (o ile istnieją) ekstrema lokalne oraz przedziały monotoniczności funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x - 4,$

c) $f(x) = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1},$

d) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2},$

e) $f(x) = x^2 \ln x,$

f) $f(x) = x^2 e^{-x}.$

4. Wyznaczyć wartość najmniejszą i wartość największą funkcji f w podanym przedziale I :

a) $f(x) = x - 2 \ln x, \quad I = [1, e],$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \quad I = [-2, 2],$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad I = \mathbb{R},$

d) $f(x) = \arctan x^2, \quad I = \mathbb{R}.$

5. Wyznaczyć pochodną n -tego rzędu funkcji określonej następującym wzorem:

a) $f(x) = e^{2x},$

b) $f(x) = \cos x,$

c) $f(x) = \ln x,$

d) $f(x) = \frac{2}{3+x}.$

6. Wyznaczyć (o ile istnieją) punkty przegięcia wykresu funkcji oraz przedziały wklęsłości i przedziały wypukłości funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$,

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$,

c) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$,

d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$,

e) $f(x) = x \ln \frac{1}{x}$,

f) $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$.

7. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji f w podanym punkcie x_0 :

a) $f(x) = x^5 + x^4 + x + 1$, $x_0 = 1$,

b) $f(x) = \sin x + 2 \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$,

c) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $x_0 = 0$,

d) $f(x) = \ln(x + e^x)$, $x_0 = 0$.

8. Obliczyć przybliżoną wartość podanych wyrażeń:

a) $\sqrt{15,99}$,

b) $\sqrt[3]{8,01}$,

c) $\sin(0,02)$,

d) $\cos(-0,4)$.

9. Czy dla podanych funkcji zachodzi w przedziale $[-1, 1]$ teza twierdzenia Rolle'a?

a) $f(x) = -x^2 + 1$,

b) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

10. Czy funkcja $f(x) = 3x^2 - 5$ spełnia w przedziale $[-2, 0]$ warunki twierdzenia Lagrange'a? Jeśli tak, to wyznaczyć punkt c , o którym jest mowa w twierdzeniu.

11. Wielomian $f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 2$ przedstaw w postaci sumy potęg dwumianu $x - 1$.

12. Wykorzystując regułę de l'Hospitala obliczyć podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x}$,

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^{-2x}}{3x^2 + x}$,

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{x^3 + x^2 + 2x}$,

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$,

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{2x^2 - 6x}$,

g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin 2x - \cos x}$,

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$,

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$,

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$,

k) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x)$,

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) \ln x$,

l) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$,

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}$.