ZiIP I rok
studia zaoczne

LISTA 6

(Funkcje i ich własności)

Zad. 1 Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\log\left(1-2x^2\right)$; b) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{4-x}}{\log\left(x^2-4\right)}$; c) $f(t)=\arcsin(\log t)$; d) $h(u)=\frac{u}{\sqrt{\sin u-1}}$;

f) $g(z)=\frac{1}{\sqrt{-z^2+5z-6}}$; h) $f(x)=\arcsin\frac{x+1}{x-1}$; i) $f(x)=\log\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+3}$.

Zad. 2. Sporządzić wykresy funkcji:

a) $f(x)=|\ln x|$; b) $f(x)=|2x+3|$; c) $f(x)=|tgx|$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; d) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(x^2-1\right)$;

e) $f(x)=|\operatorname{sgn}(x-1)|$; f) $f(x)=|\log_2(x+1)|$; g) $f(x)=|arctgx|$; h) $f(x)=|\arcsin x|+1$.

Zad. 3. Dane są funkcje: $f(x)=x^2+3$ i $g(x)=\sqrt{x-1}$. Wyznaczyć *f(g(x)), g(f(x))* oraz określić dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

Zad. 4. Wyznaczyć funkcję odwrotną do $f(x)=x^4-2x^2+1$ w $\langle 1,\infty)$.

Zad. 5. Dane są funkcje: $f(x)=x\cdot\log\frac{2x^2+x+1}{2x^2-x+1}$ i $g(x)=\log\left(\sqrt{1+4x^2}-2x\right)$. Wykazać, że *f* jest parzysta, a *g* jest nieparzysta.

Zad. 6. Obliczyć granice funkcji (jeżeli istnieją):

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6}$; d) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^2-8x-20}$; e) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^3+125}{2x^2-50}$;

f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^5+32}$; g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{3^x+1}$; k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)$; l) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$; ł) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}$; m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 2x}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{4x}$; o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sqrt{x+4}-2}$; p) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$; r) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; q) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 2x}{6x}$;

s) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$; t) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$; u) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\sin x}{x^2}$.

Zad. 7. Obliczyć granice jednostronne funkcji w podanym punkcie:

a) $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $x=1$; b) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$, $x=-2$; c) $f(x)=\frac{-2}{(x-2)^2}$, $x=2$; e) $f(x)=2^{\frac{1}{2-x}}$, $x=2$;

f) $f(x)=3^{\frac{1}{(2-x)^2}}$, $x=2$; g) $f(x)=e^{\frac{-2}{x-3}}$, $x=3$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$, $x=0$.

Zad. 8. Zbadać ciągłość funkcji: a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-25}{x+5} & dla\ x\neq -5\\ -10 & x=-5\end{cases}$; b) $g(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|} & dla\ x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

Zad. 9. Wyznaczyć punkty nieciągłości danej funkcji, określić ich rodzaj oraz narysować wykres:

a) $f(x)=\begin{cases}-\log_{\frac{1}{2}}(x+3) & -3\langle x\le -2\\ \frac{\pi}{2} \quad dla & -2\langle x\le 0\\ arctgx & x\rangle 0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}2 & x=0,\\ 4-x^2 \quad dla & 0\langle |x|\langle 2,\\ 0 & |x|\ge 2\end{cases}$

Zad. 10. Czy równanie $\sin x-x+1=0$ ma pierwiastek rzeczywisty?