

Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 1a.

Szeregi liczbowe. Kryteria zbieżności szeregów.

1. Wykorzystując warunek konieczny zbieżności szeregu, wykazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 - n^3}{(n-1)^3}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1})$.

2. Stosując kryterium d'Alamberta zbadać zbieżność następujących szeregów:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$; d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}$.

3. Korzystając z kryterium Cauchy'ego rozstrzygnąć, które z podanych niżej szeregów są zbieżne:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 2^n$.

4. Zbadać zbieżność następujących szeregów naprzemiennych, stosując kryterium Leibniza:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2} - 1)$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{n+100}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln^2 n}$.

5. Zbadać zbieżność szeregów:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n^4+2n^2+1}$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{n^3+3n^2+1}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$; f. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$; g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$.

6. Zbadać zbieżność szeregów:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{n!}$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+\ln^2 n}$.

7. Wykazać, że:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$; b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{2^n} = 0$; c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$;

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{2^n+3^n} = 0$.