

Analiza matematyczna (Inżynieria Danych I rok) Lista nr 3.

Całki nieoznaczone i oznaczone. Zastosowanie całek oznaczonych. Całki niewłaściwe.

1. Obliczyć całki nieoznaczone:

1) $\int x^5 dx$, 2) $\int \frac{dx}{x^4}$, 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2}}$, 4) $\int 4^x dx$, 5) $\int \frac{dx}{3^x}$.

2. Obliczyć całki nieoznaczone:

1) $\int (x - 2e^x) dx$, 2) $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx$, 3) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$, 4) $\int 3^x \cdot 5^{2-x} dx$, 5) $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

3. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części, obliczyć całki:

1) $\int \ln x dx$, 2) $\int x^2 2^x dx$, 3) $\int x \ln^2 x dx$, 4) $\int e^x \sin x dx$, 5) $\int \arcsin x dx$.

4. Stosując odpowiednie podstawienie, obliczyć całki nieoznaczone:

1) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}} dx$, 2) $\int \frac{x}{(1-x)^{12}} dx$, 3) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, 4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx$, 5) $\int \frac{\sin x}{3+2 \cos x} dx$.

5. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

1) $\int \frac{x^2}{x^2+4x+3} dx$, 2) $\int \frac{x+1}{x^2+2x} dx$, 3) $\int \frac{x^2}{x+1} dx$, 4) $\int \frac{x}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx$, 5) $\int \frac{1}{x^2+2x+8} dx$.

6. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

1) $\int \cos 5x \cos 7x dx$, 2) $\int \sin^3 x dx$, 3) $\int \cos^5 x dx$, 4) $\int \frac{1}{1+\cos x + \sin x} dx$.

7. Obliczyć całki z funkcji niewymiernych:

1) $\int \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}} dx$, 2) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-10}} dx$, 3) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$, 4) $\int \sqrt{x^2-36} dx$, 5) $\int \sqrt{4x-x^2-3} dx$.

8. Obliczyć całki nieoznaczone:

1) $\int \frac{x\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x^2} dx$, 2) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x} dx$, 3) $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx$, 4) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$,
5) $\int \cos x e^{\sin x} dx$, 6) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$, 7) $\int \cos x \sin^5 x dx$, 8) $\int x \sin(2x^2+1) dx$,
9) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$, 10) $\int \frac{x^3}{\cos^2 x^4} dx$, 11) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$, 12) $\int x^2 \sin x dx$,
13) $\int e^{2x} \sin x dx$, 14) $\int x^3 e^x dx$, 15) $\int \arcsin x dx$, 16) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+3} dx$,
17) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+5} dx$, 18) $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5} dx$, 19) $\int \frac{dx}{-x^2+6x-5}$, 20) $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9} dx$,
21) $\int \frac{dx}{x^2+4}$, 22) $\int \frac{dx}{13-6x+x^2}$, 23) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$, 24) $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$,
25) $\int \frac{x^3+2x-6}{x^2-x-2} dx$, 26) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

9. Obliczyć całki oznaczone:

a. $\int_{-1}^2 x(1+x^3) dx$, b. $\int_1^2 (\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + x^{-4}) dx$, c. $\int_1^e x \ln x dx$, d. $\int_0^1 x e^{-x} dx$,
e. $\int_0^2 \frac{3x-1}{3x+1} dx$, f. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, g. $\int_0^1 x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$, h. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

10. a. Obliczyć pole obszaru zawartego między krzywymi $y = x^2$, $y^2 = x$;

b. Obliczyć pole obszaru zawartego między liniami $y = x^3$ i $y = 4x$;

c. Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy hiperbolą $xy = 4$ a prostą $x + y - 5 = 0$;

11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = \sin x$, $y = \cos 2x$ oraz osią OY ($x \geq 0$).

12. Obliczyć pole obszaru zawartego między liniami:

a. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$; b. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$;

c. $y = 9 - x^2$, $y = 9$ i styczną do paraboli w punkcie $(-3, 0)$.

13. Obliczyć długości łuków podanych krzywych:

a. $9y^2 = 2x^3$, gdzie $x \in [0, 2]$; b. $y = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

14. Obliczyć długości łuków podanych krzywych:

a. $y = x^2$, gdzie $x \in [0, 1]$;

b. $y = x\sqrt{x}$, od punktu $A = (0, 0)$ do punktu $B = (\frac{4}{9}, \frac{8}{27})$.

15. a. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót wokół osi OX sinusoidy $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$;

b. Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót wokół osi OX linii $y^2(x-4) = x(x-3)$, $x \in [0, 3]$;

c. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót wokół osi OX linii $3y - x^3 = 0$, $x \in [0, 1]$.

16. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$ wokół osi OY .

17. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru

$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, \frac{4}{x} \leq y \leq 5 - x\}$ wokół osi OX .

18. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru

$$D = \{(x, y) : \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq y \leq \sqrt{\operatorname{ctg} x}\} \text{ wokół osi } OX.$$

19. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót krzywej

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \text{ dla } x \in [0, \sqrt{3}] \text{ wokół osi } OY.$$

20. Obliczyć drogę, jaką przebędzie kula tocząca się po pewnym torze w ciągu pierwszych 4 sekund od startu, jeśli prędkość z jaką się porusza wyraża się wzorem

$$v(t) = 6\sqrt{t} \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

21. Ciało wykonuje drgania wzdłuż osi OX z szybkością $v(t) = v_0 \cos \omega_0 t$, gdzie v_0, ω_0 są stałymi. Znaleźć położenie ciała w chwili t_2 , jeżeli w chwili t_1 znajdowało się ono w punkcie x_1 .

22. Obliczyć pracę jaką trzeba wykonać, aby ciało o masie m podnieść z powierzchni Ziemi na wysokość h .

23. Obliczyć $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx$ na podstawie jej interpretacji geometrycznej.

24. Zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych:

a. $\int_3^\infty \frac{dx}{x^4}$; b. $\int_0^\infty \frac{x dx}{x^2+4}$; c. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}$; d. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+9}$;

e. $\int_{-\infty}^\infty e^{-2x}$; f. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; g. $\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}$; h. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

25. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami $x = 1, y = 0, y = \frac{1}{x^3}$ dla $x \geq 1$.