Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 4.

Całki podwójne i potrójne.

1.Obliczyć całki $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$, jeżeli:

a. $f(x,y) = xy, \quad D = [0,1] \times [0,1];$

b. $f(x,y) = x + \sin y, \quad D = [0,\pi] \times [0,\pi];$

c. $f(x,y) = xy, \quad D = \{(x,y) \,:\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\};$

d. $f(x,y) = xy + \cos y, \quad D = [0,\pi] \times [0,\pi];$

e. $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad D = [0,1] \times [0,1];$

f. $f(x,y) = x, \quad D$ - obszar ograniczony krzywymi $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2, \quad 5y - 3x = 8.$

g. $f(x,y) = 1 + y, \quad D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 + 2x \leq 0,\, y \geq 0\};$

h. $f(x,y) = y, \quad D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 2x,\, y \geq 0\};$

i. $f(x,y) = \sin x \cos y, \quad D$ - trójkąt o wierzchołkach $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$,

j. $f(x,y) = x + 2y, \quad D$ - trójkąt o wierzchołkach $(-1,1)$, $(2,2)$, $(0,0)$,

k. $f(x,y) = 2(x+y), \quad D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 9,\, x \geq 0\};$

l. $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2), \quad D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2},\, x \geq 0\};$

ł. $f(x,y) = e^{-x^2 - y^2}, \quad D = \{(x,y) \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\};$

m. $f(x,y) = (x+y)^2 + 2x - 2y, \quad D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq a^2,\, x \geq 0,\, -x \leq y \leq x\}.$

2. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{2x^2-1}^{x^2} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

3. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int_{0}^{1} \left(\int_{-2+\sqrt{2y-y^2}}^{1} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

4. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int_{0}^{2} \left(\int_{-x^2}^{2-\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

5. Zamienić całkę potrójną $\int\int\int_V f(x,y,z)\,dxdydz$ na całkę iterowaną, jeżeli obszar V jest ograniczony powierzchniami:

a. $y=0, \quad y=\sqrt{1-x^2}, \quad z=4, \quad z=4y;$

b. $z=\sin x, \quad y=0, \quad y=2x,$ gdzie $0\le x\le \pi;$

c. $z=1-y^2, \quad x=0, \quad x=2, \quad y=0 \quad z=y.$

6. Dla całki

$$\int_{-2}^{2} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{4} f(x,y,z)\,dz$$

narysować obszar całkowania, a następnie zmienić porządek całkowania według kolejności $\int dz \int dy \int f(x,y,z)\,dx$.

7. Znaleźć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

a. $z=1+x+y, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y=1;$

b. $y=x^2, \quad z=x^2+y^2, \quad y=1, \quad z=0;$

c. $z=\cos x\cos y, \quad z=0, \quad |x+y|\le\frac{\pi}{2}, \quad |x-y|\le\frac{\pi}{2}.$

8. Obliczyć całkę potrójną $\int\int\int_V f(x,y,z)\,dxdydz$, jeżeli:

a. $f(x,y,z)=xz\sin(xy),$ gdzie $V=[\frac{1}{6},\frac{1}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1];$

b. $f(x,y,z)=\frac{1}{(x+y+z+1)^3},$ gdzie V - obszar zawarty między płaszczyznami układu współrzędnych i płaszczyzną $x+y+z=1;$

c. $f(x,y,z)=x\cdot 2^{z-y},$ gdzie $V=[-1,1]\times[0,1]\times[0,1];$

d. $f(x,y,z)=\frac{1}{(x+y+z+1)^2},$ gdzie V - obszar określony warunkami $x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0,$ $x+y+z\le 1;$

e. $f(x,y,z)=x^2+y^2,$ gdzie V - obszar określony nierównością $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1;$

f. $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$ gdzie V - obszar określony nierównością $x^2+y^2+z^2\le x.$

9. Znaleźć masę prostopadłościanu $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, jeśli jego gęstość w punkcie (x,y,z) wynosi $x+y+z$.

10. Znaleźć masę części kuli o promieniu R znajdującej się w pierwszej ósemce układu współrzędnych, jeśli gęstość tej bryły w każdym jej punkcie jest równa odległości tego punktu od płaszczyzny $x0y$.

11. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć $\int\int\int_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$, gdzie V - obszar ograniczony sferami $x^2+y^2+z^2=1, \quad x^2+y^2+z^2=9.$

12. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć $\int\int\int_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$, gdzie V - obszar określony warunkiem $x^2+y^2+z^2 \le z$.

13. Obliczyć objętość obszaru V ograniczonego powierzchniami:
a. $2\,z = x^2+y^2, \quad z = \sqrt{x^2+y^2}$; b. $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2+4z = 0$.