Analiza matematyczna (Inżynieria Danych I rok) Lista nr 5.

Całki krzywoliniowe.

1.Obliczyć gradienty funkcji f:

a. $f(x,y) = e^x \sin y$; b. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$;

c. $f(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$; d. $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$.

2. Wykazać, że:

$$a.\ \nabla(fg) = g\,\nabla f + f\,\nabla g;\quad b.\ \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f\ - f\,\nabla g}{g^2}.$$

3. Obliczyć pochodną funkcji f w punkcie P w kierunku wektora $\vec{v}$:

a. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $P = (2,3)$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$;

b. $f(x,y,z) = y^2e^x\cos z$, $P = (0,1,\pi)$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$.

4. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int_\Gamma f\,dl$ z funkcji f po zadanej krzywej Γ:

a. $f(x,y) = x^2y$, Γ - okrąg o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$;

b. $f(x,y) = x+y$, Γ - brzeg trójkąta o wierzchołakach $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (0,0)$;

c. $f(x,y) = xy$, Γ - brzeg kwadratu $|x|+|y| \le 1$;

d. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, Γ - okrąg o równaniu $x^2+y^2 = 4$, $z = 2$.

5. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną $\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{r}$:

a. $\vec{F}(x,y) = y^2\,\vec{i} - x^2\,\vec{j}$, Γ - odcinek łączący punkty $A = (0,0)$ i $B = (1,2)$;

b. $\vec{F}(x,y) = yx\,\vec{i} + (y-x)^2\,\vec{j}$, Γ - krzywa dana równaniem $xy = 1$, $1 \le x \le 3$;

c. $\vec{F}(x,y,z) = z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$, Γ - krzywa dana równaniem parametrycznym

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ łącząca punkty $(1,0,0)$, $(1,0,4\pi)$.

d. $\vec{F}(x,y) = 2x(5y+2)\,\vec{i} + 12y\,\vec{j}$, Γ - prostokąt o wierzchołakach

$A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,3)$, $D = (0,3)$.

e. $\vec{F}(x,y,z) = e^x\,\vec{i} + e^{\frac{4y}{x}}\,\vec{j} + e^{\frac{z}{y}}\,\vec{k}$, Γ - krzywa dana równaniem parametrycznym

$\vec{r}(t) = (t,t^2,t^3)$, gdzie $0 \le t \le 1$.

6. Obliczyć pracę pola sił $\vec{F}(x,y,z) = 4xy\,\vec{i} - 8y\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ po drodze:

a. linia prosta $y = 2x$, $z = 2x$ łącząca punkty $A = (0,0,0)$ i $B = (3,6,6)$;

b. parabola $y = \frac{2x^2}{3}$, $z = 0$ łącząca punkty $A = (0,0,0)$ i $B = (3,6,0)$;

c. okrąg $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$;

d. hiperbola $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ łącząca punkty $A = (1,0,0)$ i $B = (2,\sqrt{3},0)$.

7. Korzystając ze wzoru Greena obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną $\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{r}$ po brzegu Γ obszaru D:

a. $\vec{F}(x,y) = (y, 4x)$, $D = \{(x,y) \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}$;

b. $\vec{F}(x,y) = (x\sin y, -y\sin x)$, $D = \{(x,y) \,:\, 0 \le x \le \pi,\, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\}$;

c. $\vec{F}(x,y) = (-y^3, x^3)$, $D = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \le 4\}$;

d. $\vec{F}(x,y) = (2xy, e^x + x^2)$, D - trójkąt o wierzchołakach $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$;

e. $\vec{F}(x,y) = (x\ln y, ye^x)$, $D = \{(x,y) \,:\, 0 \le x \le 3,\, 1 \le y \le 2\}$;

f. $\vec{F}(x,y) = (y^3, x^3 + 3xy^2)$, $D = \{(x,y) \,:\, x^2 \le y \le x\}$;

g. $\vec{F}(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$, D - trójkąt opisany nierównościami $x \le y \le 2x$, $x \le 1$;

h. $\vec{F}(x,y) = (x\cos y, x^2\sin y)$, D - obszar opisany nierównościami $1 + x^2 \le y \le 2$, $x \ge 0$;

i. $\vec{F}(x,y) = (x^3 - 2y^3, x^3 + 2y^3)$, D - obszar opisany nierównościami $x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

8. Sprawdzić, czy funkcja U jest potencjałem pola wektorowego $\vec{F}$, jeśli:

a. $U(x,y) = x^2 + y^2 + 10$, $\vec{F}(x,y) = (2x, 2y)$, $(x,y) \in R^2$;

b. $U(x,y,z) = xyz + x^2 + x + x^3y^2 + z^3y^3$,

$\vec{F}(x,y,z) = (2x + yz + 1 + 3x^2y^3, 2x^3y + xz + 3y^2z^3, 3z^2y^3 + xy)$, $(x,y,z) \in R^3$;

c. $U(x,y,z) = xyz + x^2y^2z^3 + x + y$,

$\vec{F}(x,y,z) = (yz + 2xy^2z^3 + 1, xz + 2yx^2z^3 + 1, xy + 3x^2y^2z^2 + 1)$, $(x,y,z) \in R^3$.

9. Wyznaczyć potencjały podanych pól wektorowych:

a. $\vec{F}(x,y) = (3y^2, 6xy)$, b. $\vec{F}(x,y) = (\cos y + y\cos x, \sin x - x\sin y)$,

c. $\vec{F}(x,y,z) = (z^2, 2yz, 2xz + y^2)$, d. $\vec{F}(x,y,z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$.

10. Obliczyć podane całki krzywoliniowe $\int_\Gamma \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{r}$, gdzie Γ jest łukiem łączącym punkty A i B, jeśli:

a. $\vec{F}(x,y) = (3y, 3x)$, $A = (1,2)$, $B = (4,0)$;

b. $\vec{F}(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$, $A = (-2,2)$, $B = (-1,0)$;

c. $\vec{F}(x,y,z) = (3x, 2y, 4z)$, $A = (0,0,0)$, $B = (1,2,-3)$;

d. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy)$, $A = (1,0,1)$, $B = (1,1,0)$.