Analiza matematyczna (ID) Lista nr 6.

Całki powierzchniowe.

1. Obliczyć całkę powierzchniową niezorientowaną $\int\int_S G(x,y,z)\,dA$ z funkcji G po zadanym płacie powierzchniowym S:

a. $G(x,y,z) = 3(x+y+z)$, S - powierzchnia $z = x+y$, $0 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$;

b. $G(x,y,z) = 2xy+1$, S - powierzchnia $x^2+y^2 = 4$, $|x| \le 1$, $|z| \le 1$;

c. $G(x,y,z) = e^{x^2+y^2} + x^2 - z$, S - powierzchnia zadana parametrycznie

$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,2\pi]$;

d. $G(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2$, S - powierzchnia $z = 4\sqrt{x^2+y^2}$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 4$;

e. $G(x,y,z) = x+y+z$, S - powierzchnia $x^2+y^2+z^2 = 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

f. $G(x,y,z) = xy$, S - powierzchnia zadana parametrycznie

$\vec{r}(u,v) = (u,v,uv)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$.

2. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\int\int_S \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{A}$ z funkcji wektorowej $\vec{F}$ po zadanym płacie powierzchniowym S:

a. $\vec{F}(x,y,z) = (2x, 2y, 0)$, S - powierzchnia $z = 2x+3y$, $0 \le y \le 2$, $-1 \le x \le 1$;

b. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, e^y, 1)$, S - powierzchnia $x+y+z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

c. $\vec{F}(x,y,z) = (e^y, -e^z, e^x)$, S - powierzchnia $x^2+y^2 = 9$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$;

d. $\vec{F}(x,y,z) = (1, x^2, xyz)$, S - powierzchnia $z = xy$, $0 \le x \le y$, $0 \le y \le 1$;

e. $\vec{F}(x,y,z) = (1,1,1)$, S - powierzchnia $x^2+y^2+4z^2 = 4$, $z \ge 0$;

f. $\vec{F}(x,y,z) = (z, -xy, y)$, S - powierzchnia $x^2+9y^2+4z^2 = 36$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

g. $\vec{F}(x,y,z) = (z^3, 0, -z^3)$, S - powierzchnia dana parametrycznie

$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $0 \le u \le 5$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$;

h. $\vec{F}(x,y,z) = (x-z, y-z, z-y)$, S - powierzchnia dana parametrycznie

$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $0 \le u \le 5$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

3. Korzystając ze wzoru Gaussa obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\int\int_S \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{A}$, gdzie S jest powierzchnią bryły V zorientowaną na zewnątrz:

a. $\vec{F}(x,y,z) = (0, e^y, 0), \quad V = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, \ 0 \leq z \leq 1\}$;

b. $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, 0, z^3), \quad V = \{(x,y,z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, \ |z| \leq 1\}$;

c. $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^2, z^2x), \quad V = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2, \ 0 \leq z \leq 3\}$;

d. $\vec{F}(x,y,z) = (e^x, -ye^x, 3z), \quad V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 4, \ |z| \leq 4\}$;

e. $\vec{F}(x,y,z) = (x^3z^2, y^3z^2, x^2z), \quad V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 4, \ |z| \leq 4\}$;

f. $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2z), \quad V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 4, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ |z| \leq 1\}$;

g. $\vec{F}(x,y,z) = (0, 10y, z^3), \quad V = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 6, \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq z \leq y\}$;

h. $\vec{F}(x,y,z) = (x^3z, -xz^2, 3), \quad V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 4z^2, \ 0 \leq z \leq 1\}$;

i. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, -2xy + y, 4z), \quad V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z^2, \ 0 \leq z \leq 2\}$;

j. $\vec{F}(x,y,z) = (x + z, y + z, x + y), \quad V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ z \geq 0\}$;

k. $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3), \quad V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;

l. $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, 3z(2 - x^2 - y^2)), \quad V = \{(x,y,z) : 9x^2 + y^2 + 9z^2 \leq 9, \ z \geq 0\}$;

ł. $\vec{F}(x,y,z) = (\sin^2 x, 0, -z - z\sin(2x)), \quad V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 2, \ |z| \leq 1\}$.

4. Korzystając ze wzoru Stokesa obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną $\oint_L \vec{F}(\vec{r}) \circ d\vec{r}$, jeżeli:

a. $\vec{F}(x,y,z) = (-3y, 3x, z), \quad L : \ x^2 + y^2 = 4, \quad z = 1$;

b. $\vec{F}(x,y,z) = (y, xz^3, -zy^3), \quad L : \ x^2 + y^2 = 4, \quad z = 2$;

c. $\vec{F}(x,y,z) = (-2z, x, -x), \quad L : \ x^2 + y = 1, \quad z = y + 1$;

d. $\vec{F}(x,y,z) = (y, z^2, x^3), \quad L : \ x^2 + y = 1, \quad z = y + 1$;

e. $\vec{F}(x,y,z) = (0, xyz, 0), \quad L :$ trójkąt o wierzchołkach

$A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1)$;

f. $\vec{F}(x,y,z) = (z, x, y), \quad L :$ trójkąt o wierzchołkach

$A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1)$;

g. $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, 0, x^2), \quad L :$ trójkąt o wierzchołkach

$A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1)$.