Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 3.

Własnośći zbioru liczb rzeczywistych.

1. Pokazać, że przedział $(0,1)$ jest zbiorem nieprzeliczalnym . Wywnioskować stąd, że zbiór liczb rzeczywistych R jest nieprzeliczalny.

2. Pokazać, że

a. $-|x| \leq x \leq |x|$; b. $\sqrt{x^2} = |x|$;

c. $|xy| = |x||y|$; d. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ o ile $y \neq 0$;

e. Jeżeli $a > 0$, to $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$.

f. Jeżeli $a \geq 0$, to $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \leq -a \vee x \geq a) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

g. $|x + y| \leq |x| + |y|$; h. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

3. Sprawdzić, czy następujące liczby są wymierne czy niewymierne:

a. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$; b. $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; c. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}} - \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

4. Zbadać ograniczoność oraz wyznaczyć kresy zbiorów:

a. $A = (0,1) \cap Q$; b. $B = \left\{\frac{n}{2n+1} : n \in N\right\}$; c. $C = \left\{\frac{1}{x} : x \in (0,1]\right\}$;

d. $D = \{x \in R : |2x + 3| + |x + 3| - x < 6\}$;

e. $E = \{x \in R : |x^3 - 1| < x^2 + x + 1\}$;

f. $F = \{x \in R : \log_2 |x + 2| < 3\}$.

5. Pokazać, że dla dowolnych $a, b \in R$ zachodzi nierówność

$$\left|\frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2}\right| \leq |a - b|.$$

6. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, ..., a_n$ oraz $b_1, b_2, ..., b_n$ jest spełniona nierówność

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + .. + a_nb_n| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

7. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, .., x_n$, $x \in R$ jest spełniona nierówność

$$|x + x_1 + x_2 + ... + x_n| \geq |x| - (|x_1| + |x_2| + ... + |x_n|).$$

8. Rozwiązać równania:

a. $|x + 1| = 3$; b. $|x + 1| = |x - 1|$; c. $|x + 1| + 2|x - 1| = 5$;

d. $|1 - 2x| + |2x - 6| = x$; e. $|4 - 2x| + | - x + 3| = 5$; f. $|x^2 - 7x + 8| = 2$.

9. Rozwiązać nierówności:

a. $|\frac{1}{3}x - 1| < 5$; b. $|3x - 5| < |x + 9|$; c. $|x + 100| > |2x - 1|$;

d. $|x - 1| + |2x - 5| < 9$; e. $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right| < 2$; f. $\left|\frac{5x-3}{2x+7}\right| < 2$;

g. $\left|\frac{2x-5}{x+3}\right| > 1$; e. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$.

10. Rozwiązać nierówności:

a. $\frac{x+3}{x-3} \geq \frac{x-1}{x+5}$; b. $\frac{1-2x}{1+x} - \frac{1+x}{1+2x} > 1$; c. $\frac{x^2-4}{x^2-5x} < 0$;

d. $\frac{13}{x-3} - \frac{3}{x+1} < -4$; e. $\frac{x^2-4}{x^2-5x+4} \geq 0$; f. $\frac{x^2-2x}{x^2-1} < 0$;

g. $1 < \frac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15} < 2$; h. $\left|\frac{x^2-5x+3}{x^2-1}\right| < 1$; i. $\left|\frac{x^2+2x-36}{x^2-4}\right| > 1$.