Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 7.

Indukcja matematyczna. Przestrzeń metryczna.

1. Pokazać, że

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

dla dowolnego $n \in N$.

2. Niech a będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą, $a > -1$. Wykazać, że dla dowolnego $n \in N$ jest spełniona nierówność

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

3. Udowodnić, że dla dowolnego n naturalnego oraz x rzeczywistego zachodzi nierówność

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|.$$

4. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ dzieli się przez 133.

5. Pokazać, że dla dowolnego n naturalnego, $n \geq 2$, jest spełniona nierówność

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

6. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ jest prawdziwa nierówność

$$3^n > n \cdot 2^n.$$

7. Pokazać, że dla dowolnego $n \in N$ zachodzi nierówność

$$\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + ... + \sin\frac{n\pi}{3} = 2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{(n+1)\pi}{6}.$$

8. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.

9. Wykazać, że zbiór $X \neq \emptyset$ z funkcją $\rho : X \times X \to R$ spełniającą następujące warunki:

$$(i) \quad \forall_{x,y \in X} \quad \rho(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y;$$

$$(ii) \quad \forall_{x,y,z \in X} \quad \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z),$$

jest przestrzenią metryczną.

10. Czy zbiór liczb rzeczywistych R z funkcją d określoną wzorem

$$d(x,y) = |3x - y|, \quad x, y \in R,$$

jest przestrzenią metryczną?

11. Wykazać, że zbiór R^2 z funkcją d określoną wzorem

$$d(x,y) = \max\{2|x_1 - y_1|, 3|x_2 - y_2|\}, \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in R^2,$$

jest przestrzenią metryczną. Znaleźć postać kul otwartych w tej przestrzeni.

12. Udowodnić, że każdy ciąg zbieżny w przestrzen metrycznej spełnia warunek Cauchy'ego.

13. Niech w przestrzeni metrycznej będą dane dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ zbieżne do punktu a. Wykazać, że ciąg $\{z_n\}$ taki, że

$$z_{2n-1} = x_n, \qquad z_{2n} = y_n$$

jest zbieżny do punktu a.