

Analiza matematyczna (Inżynieria Danych) Lista nr 8.

Granica funkcji.

1. Obliczyć granice jednostronne następujących funkcji w podanych punktach i rozstrzygnąć, czy funkcje te mają w tych punktach granice:

a. $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + x$ w punkcie $x_0 = 1$;

b. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ w punkcie $x_0 = 0$;

c. $f(x) = \frac{x}{x-2}$ w punkcie $x_0 = 2$;

d. $f(x) = \arctg \frac{1}{1-x}$ w punkcie $x_0 = 1$;

e. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ w punkcie $x_0 = 0$;

f. $f(x) = \operatorname{tg} x$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

g. $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x}$ w punkcie $x_0 = 3$.

2. Uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-3}$; b. $\lim_{x \rightarrow \pi} 2^{\frac{1}{\sin x}}$.

3. Obliczyć granice:

a. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x+1}$; b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$; c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}$;

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+25} - 5}$; e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$; f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}$;

g. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3} - 1}$; h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$; i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1+2^x)}{3^x}$.

j. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x}$; k. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$; l. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

4. Obliczyć granice:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$; b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{x(\sqrt{x^2 + 1} - x)}$; c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{2x-1}$; e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1})$.

5. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, uzasadnić równości:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = 0$; b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\sin x}{x^2} = 0$; c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2} = 0$.

6. Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach, uzasadnić równości:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \sin x - x) = -\infty$; b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} = \infty$.