

Kurs wyrównawczy (Inżynieria Danych) Lista nr 4.

Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne.

1. Sprawdzić prawdziwość poniższych tożsamości w dziedzinach określoności:

a. $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$

b. $\sin 7\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{7}{2}\alpha + \cos 7\alpha = 1;$

c. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha;$

d. $\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 4\alpha \cdot \sin \alpha = \cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha;$

e. $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{2 \cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$

2. Określić dziedzinę, zbiór wartości oraz naszkicować wykresy następujących funkcji:

a. $f(x) = \sin x;$ b. $f(x) = \cos x;$ c. $f(x) = \operatorname{tg} x;$

d. $f(x) = \operatorname{ctg} x;$ e. $f(x) = 3 \sin x;$ f. $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1;$

g. $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2};$ h. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) - 2.$

3. Sporządzić wykresy funkcji $f(x) = |\sin x| - 1$ oraz $g(x) = 1 - \sin^2 x$.

4. Obliczyć wartości $\sin 2x$ oraz $\cos 2x$, wiedząc, że $\cos x = -0,8$ i $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

5. Rozwiązać następujące równania:

a. $2 \sin x = -1;$ b. $\cos(x - \frac{\pi}{5}) = \frac{1}{2};$

c. $-3 \operatorname{tg}(-2x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3};$

d. $\sin^2 \frac{\pi x}{2} + 2 \cos \frac{\pi x}{2} - 1 = 0;$

e. $\sin x + \cos x = 1;$ f. $3 \sin x = 2 \cos^2 x;$

g. $\cos 3x = \cos x;$

h. $\cos x - \cos 3x = \sin x - \sin 3x;$

i. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x;$

j. $\operatorname{ctg} 8x \cdot \operatorname{ctg} 10x = -1.$

6. Dana jest funkcja $f(x) = \cos 2x - \cos x$.

(i) Obliczyć wartość $f(x)$ dla $x = \frac{\pi}{6}$.

(ii) Wykazać, że $f(x) = (\cos x - 1)(2 \cos x + 1)$.

(iii) Rozwiązać równanie $\frac{f(x)}{\cos x} = 0$.

7. Rozwiązać następujące nierówności:

a. $\sin^2 x + \cos^2 x \geq 1$; b. $\cos x < \frac{1}{2}$;

c. $0 \leq \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

d. $\sin 2x \geq 2$;

e. $\sin x > \cos x$; f. $\cos^2 x < \frac{1}{2}$;

g. $\cos x + \operatorname{tg} x < 1 + \sin x$;

h. $|\cos x + 1| \geq \frac{1}{2}$;

i. $|\sin 2x| \leq \frac{1}{2}$;

j. $2 \sin^2 3x + \sin^2 6x < 2$.

8. Określić dziedzinę, zbiór wartości oraz naszkicować wykresy następujących funkcji:

a. $f(x) = \arcsin x$; b. $f(x) = \arccos x$;

c. $f(x) = \operatorname{arctg} x$; d. $f(x) = \operatorname{arccotg} x$.

9. Obliczyć:

a. $\arcsin 0$; b. $\arcsin \frac{1}{2}$; c. $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;

d. $\operatorname{arctg} 1$; e. $\operatorname{arccotg}(-1)$; f. $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

10. Określić dziedzinę oraz zbiór wartości następujących funkcji:

a. $f(x) = -2 \arcsin \frac{|x-1|+2}{4}$; b. $f(x) = 2 \arccos(x^2)$;