Analiza matematyczna (Informatyka) Lista nr 7.

Reguła de L'Hospitala. Twierdzenia o wartości średniej. Monotoniczność funkcji, wypukłość funkcji, ekstrema lokalne i globalne funkcji. Wzór Taylora. Badanie przebiegu zmienności funkcji.

1. Korzystając z reguły de L'Hospitala, obliczyć granice funkcji:

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$, b. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$, c. $\lim_{x\to -\infty} [x(e^{\frac{1}{x}} - 1)]$, d. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$,
e. $\lim_{x\to 1^-} \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) \ln(1-x)$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}$, g. $\lim_{x\to\infty} (\cos(\frac{1}{x}))^x$.

2. Udowodnić podane nierówności:

a. $x \le \arcsin x \le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $0 \le x < 1$;
b. $e^x > ex$ dla $x > 1$;
c. $\ln \frac{b}{a} \le b - a$ dla $1 \le a \le b$.

Wskazówka: Wykorzystać twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej:
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, ma pochodną na przedziale (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:

a. $f(x) = (x+1)e^x$; b. $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$; c. $f(x) = x + \cos x$.

4. Korzystając z definicji, uzasadnić że podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach:

a. $f(x) = 2 - 2|x+5|$, $x_0 = -5$; b. $g(x) = |\sin x|$, $x_0 = \pi$;
c. $h(x) = 2 + |x-1|$, $x_0 = 1$.

5. Pokazać, że $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$ dla $x > 0$.

6. Znaleźć ekstrema lokalne podanych funkcji:

a. $f(x) = x \ln x$, b. $g(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, c. $k(x) = \frac{1}{x^2-x}$, d. $h(x) = (x-5)e^x$.

7. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość następujących funkcji w podanych przedziałach:

a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x, \quad [0, 3]$; b. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad [0, 4]$;

c. $f(x) = \sqrt{3 - 2x}, \quad [-1, 1]$; d. $f(x) = x^2 \ln x, \quad [e^{-1}, e]$.

8. Punkt materialny porusza się po linii prostej według prawa

$s(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t^2 + 4$ (s-droga, t-czas). Znaleźć największą prędkość tego punktu.

9. Napisać wzór Taylora dla:

a. funkcji $f(x) = \frac{x}{x-1}$, punktu $x_0 = 2$ oraz $n = 3$;

b. funkcji $g(x) = \ln x$, punktu $x_0 = e$ oraz $n = 4$.

10. Napisać wzór Taylora dla punktu $x_0 = 0$ i funkcji

(a) $f(x) = \cos x$, (b) $g(x) = xe^x$.

11. Oszacować dokładność podanych wzorów przybliżonych:

a. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ dla $|x| \leq \frac{\pi}{6}$;

b. $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ dla $|x| \leq \frac{1}{4}$.

12. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji:

a. $f(x) = xe^{-x}$, b. $f(x) = \ln(1 + x^2)$, c. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, d. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

13. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i sporządzić ich wykresy:

a. $f(x) = |x|e^{-x^2}$, b. $f(x) = x^2e^{-x}$, c. $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}}$, d. $f(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$,

e. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, f. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, g. $f(x) = e^{-x^2}$, h. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.