

## Analiza matematyczna (Informatyka) Lista nr 8.

*Całki nieoznaczone i oznaczone. Zastosowanie całek oznaczonych. Całki niewłaściwe.*

1. Obliczyć całki nieoznaczone:

1)  $\int x^5 dx$ , 2)  $\int \frac{dx}{x^4}$ , 3)  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2}}$ , 4)  $\int 4^x dx$ , 5)  $\int \frac{dx}{3^x}$ .

2. Obliczyć całki nieoznaczone:

1)  $\int (x - 2e^x) dx$ , 2)  $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx$ , 3)  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ , 4)  $\int 3^x \cdot 5^{2-x} dx$ , 5)  $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ .

3. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części, obliczyć całki:

1)  $\int \ln x dx$ , 2)  $\int x^2 2^x dx$ , 3)  $\int x \ln^2 x dx$ , 4)  $\int e^x \sin x dx$ , 5)  $\int \arcsin x dx$ .

4. Stosując odpowiednie podstawienie, obliczyć całki nieoznaczone:

1)  $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}} dx$ , 2)  $\int \frac{x}{(1-x)^{12}} dx$ , 3)  $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ , 4)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx$ , 5)  $\int \frac{\sin x}{3+2 \cos x} dx$ .

5. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

1)  $\int \frac{x^2}{x^2+4x+3} dx$ , 2)  $\int \frac{x+1}{x^2+2x} dx$ , 3)  $\int \frac{x^2}{x+1} dx$ , 4)  $\int \frac{x}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx$ , 5)  $\int \frac{1}{x^2+2x+8} dx$ .

6. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

1)  $\int \cos 5x \cos 7x dx$ , 2)  $\int \sin^3 x dx$ , 3)  $\int \cos^5 x dx$ , 4)  $\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x} dx$ .

7. Obliczyć całki z funkcji niewymiernych:

1)  $\int \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}} dx$ , 2)  $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-10}} dx$ , 3)  $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$ , 4)  $\int \sqrt{x^2-36} dx$ , 5)  $\int \sqrt{4x-x^2-3} dx$ .

8. Obliczyć całki nieoznaczone:

1)  $\int \frac{x\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x^2} dx$ , 2)  $\int \frac{2^x+5^x}{10^x} dx$ , 3)  $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx$ , 4)  $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$ ,  
5)  $\int \cos x e^{\sin x} dx$ , 6)  $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ , 7)  $\int \cos x \sin^5 x dx$ , 8)  $\int x \sin(2x^2+1) dx$ ,  
9)  $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ , 10)  $\int \frac{x^3}{\cos^2 x^4} dx$ , 11)  $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$ , 12)  $\int x^2 \sin x dx$ ,  
13)  $\int e^{2x} \sin x dx$ , 14)  $\int x^3 e^x dx$ , 15)  $\int \arcsin x dx$ , 16)  $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+3} dx$ ,  
17)  $\int \frac{x-3}{x^2-6x+5} dx$ , 18)  $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5} dx$ , 19)  $\int \frac{dx}{-x^2+6x-5}$ , 20)  $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9} dx$ ,  
21)  $\int \frac{dx}{x^2+4}$ , 22)  $\int \frac{dx}{13-6x+x^2}$ , 23)  $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$ , 24)  $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$ ,  
25)  $\int \frac{x^3+2x-6}{x^2-x-2} dx$ , 26)  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ .

9. Obliczyć całki oznaczone:

a.  $\int_{-1}^2 x(1+x^3) dx$ ,    b.  $\int_1^2 (\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + x^{-4}) dx$ ,    c.  $\int_1^e x \ln x dx$ ,    d.  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ ,  
e.  $\int_0^2 \frac{3x-1}{3x+1} dx$ ,    f.  $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ,    g.  $\int_0^1 x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx$ ,    h.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ .

10. a. Obliczyć pole obszaru zawartego między krzywymi  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$ ;

b. Obliczyć pole obszaru zawartego między liniami  $y = x^3$  i  $y = 4x$ ;

c. Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy hiperbolą  $xy = 4$  a prostą  $x + y - 5 = 0$ ;

11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji  $y = \sin x$ ,  $y = \cos 2x$  oraz osią  $OY$  ( $x \geq 0$ ).

12. Obliczyć pole obszaru zawartego między liniami:

a.  $y = 2x - x^2$ ,  $x + y = 0$ ;    b.  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$ ;

c.  $y = 9 - x^2$ ,  $y = 9$  i styczną do paraboli w punkcie  $(-3, 0)$ .

13. Obliczyć długości łuków podanych krzywych:

a.  $9y^2 = 2x^3$ , gdzie  $x \in [0, 2]$ ;    b.  $y = \sqrt{1 - x^2}$ , gdzie  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ .

14. Obliczyć długości łuków podanych krzywych:

a.  $y = x^2$ , gdzie  $x \in [0, 1]$ ;

b.  $y = x\sqrt{x}$ , od punktu  $A = (0, 0)$  do punktu  $B = (\frac{4}{9}, \frac{8}{27})$ .

15. a. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót wokół osi  $OX$  sinusoidy  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$ ;

b. Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót wokół osi  $OX$  linii  $y^2(x-4) = x(x-3)$ ,  $x \in [0, 3]$ ;

c. Obliczyć objętość oraz pole powierzchni bryły utworzonej przez obrót wokół osi  $OX$  linii  $3y - x^3 = 0$ ,  $x \in [0, 1]$ .

16. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru

$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$  wokół osi  $OY$ .

17. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru

$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, \frac{4}{x} \leq y \leq 5 - x\}$  wokół osi  $OX$ .

18. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót obszaru

$$D = \{(x, y) : \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq y \leq \sqrt{\operatorname{ctg} x}\} \text{ wokół osi } OX.$$

19. Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót krzywej

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \text{ dla } x \in [0, \sqrt{3}] \text{ wokół osi } OY.$$

20. Obliczyć drogę, jaką przebędzie kula tocząca się po pewnym torze w ciągu pierwszych 4 sekund od startu, jeśli prędkość z jaką się porusza wyraża się wzorem

$$v(t) = 6\sqrt{t} \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

21. Ciało wykonuje drgania wzdłuż osi  $OX$  z szybkością  $v(t) = v_0 \cos \omega_0 t$ , gdzie  $v_0, \omega_0$  są stałymi. Znaleźć położenie ciała w chwili  $t_2$ , jeżeli w chwili  $t_1$  znajdowało się ono w punkcie  $x_1$ .

22. Obliczyć pracę jaką trzeba wykonać, aby ciało o masie  $m$  podnieść z powierzchni Ziemi na wysokość  $h$ .

23. Obliczyć  $\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx$  na podstawie jej interpretacji geometrycznej.

24. Zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych:

a.  $\int_3^\infty \frac{dx}{x^4}$ ;   b.  $\int_0^\infty \frac{x dx}{x^2+4}$ ;   c.  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}$ ;   d.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+9}$ ;

e.  $\int_{-\infty}^\infty e^{-2x}$ ;   f.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ ;   g.  $\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}$ ;   h.  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^2}$ .

25. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami  $x = 1, y = 0, y = \frac{1}{x^3}$  dla  $x \geq 1$ .