II. Funkcje. Pojęcia podstawowe.

1. Podstawowe definicje i fakty.

Definicja 1.1.
Funkcją określoną na zbiorze $X \subset R$ o wartościach w zbiorze $Y \subset R$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$, co oznaczamy $f : X \to Y$.

Przez $f(x)$ oznaczamy wartość funkcji f w punkcie x.

Zbór X nazywamy *dziedziną* funkcji f i oznaczamy D_f, a zbiór Y nazywamy jej *przeciwdziedziną*.

Zbiór
$$W_f = \{f(x) \in Y \,:\, x \in D_f\}$$
będziemy nazywać *zbiorem wartości* funkcji f, a zbiór
$$\{(x, y) \in R^2 \,:\, x \in X,\; y = f(x)\}$$
wykresem funkcji f.

Uwaga
Rzut prostokątny wykresu funkcji na oś Ox jest dziedziną tej funkcji, zaś na oś Oy jest zbiorem wartości tej funkcji.

Definicja 1.2
Funkcje $f : D_f \to Y$ i $g : D_g \to Y$ są równe, co oznaczamy $f = g$, wtedy i tylko wtedy, gdy
$$D_f = D_g \quad \wedge \quad \forall x \in D_f \;\; f(x) = g(x).$$

Definicja 1.3.
Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy:

(i) *iniekcją* lub *odwzorowaniem różnowartościowym* na zbiorze $A \subset X$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad (x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2));$$

warunek ten równoważnie można zapisać w postaci

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad (f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2);$$

(ii) *suriekcją* lub odwzorowaniem zbioru X na zbiór Y, jeżeli $W_f = Y$, tzn.

$$\forall y \in Y \;\; \exists x \in X \quad f(x) = y;$$

(iii) *bijekcją*, jeżeli f jest jednocześnie iniekcją i suriekcją.

Definicja 1.4.
Funkcję $f : X \to R$ nazywamy:

(i) *okresową* o okresie T, jeżeli spełniony jest warunek

$$\exists T > 0 \;\; \forall x \in X \quad (x \pm T \in X \quad \wedge \quad f(x+T) = f(x));$$

(ii) *parzystą*, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall x \in X \quad (-x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = f(x));$$

(iii) *nieparzystą*, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall x \in X \quad (-x \in X \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x)).$$

Definicja 1.5.
Mówimy, że funkcja f jest:

(i) *ograniczona z dołu* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\exists m \in R \ \forall x \in A \quad f(x) \geq m;$$

(ii) *ograniczona z góry* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\exists M \in R \ \forall x \in A \quad f(x) \leq M;$$

(iii) *ograniczona* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli f jest ograniczona z dołu i z góry, tzn. jeżeli zachodzi warunek

$$\exists m, M \in R \ \forall x \in A \quad m \leq f(x) \leq M.$$

Uwaga.
W definicji 1.5 (iii) można tak dobrać stałe m, M, aby $0 < M = -m$ i wtedy warunek zapisać w postaci

$$\exists M > 0 \ \forall x \in A \quad |f(x)| \leq M.$$

Definicja 1.6.
Mówimy, że funkcja f jest:

(i) *rosnąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad (x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2));$$

(ii) *malejąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad (x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2));$$

(iii) *niemalejąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad (x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2));$$

(iv) *nierosnąca* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad (x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2));$$

(v) *stała* na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall x \in A \quad f(x) = C = Const.$$

Każdą z funkcji (i)-(iv) nazywamy *monotoniczną* na zbiorze A. Funkcje (i), (ii) nazywamy *ściśle monotonicznymi.*

Uwaga.

Rodzaj monotoniczności funkcji f na zbiorze $A \subset D_f$ ustalamy, badając znak ilorazu

$$Q = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

dla $x_1, x_2 \in A$ i $x_1 \neq x_2$.

Zachodzą zależności:

- f rosnąca, jeśli $Q > 0$,
- f niemalejąca, jeśli $Q \geq 0$,
- f malejąca, jeśli $Q < 0$,
- f nierosnąca, jeśli $Q \leq 0$.

Definicja 1.7.
Niech $X, Y, Z, W \subset R$ i niech $Y \subset Z$. Niech $f : X \to Y$ i $g : Z \to W$.
Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $g \circ f : X \to W$ określoną wzorem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \;\; x \in X.$$

Przykład 2.1.
Dane są funkcje $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x}$. Określić:

(a) dziedziny funkcji f i g,

(b) zbiory wartości funkcji f i g,

(c) złożenia $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny,

(d) parzystość funkcji f,

(e) monotoniczność funkcji f i g,

(f) ograniczoność funkcji f i g.

Fakt 1.8.
Jeżeli funkcja jest ściśle monotoniczna na pewnym zbiorze, tzn. jest rosnąca albo malejąca, to jest ona na tym zbiorze różnowartościowa.

Definicja 1.9.
Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie suriekcją (czyli odwzorowaniem 'na') oraz odwzorowaniem różnowartościowym na swojej dziedzinie.

Funkcją odwrotną do f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \to X$ określoną warunkiem

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x), \quad x \in X,\ y \in Y.$$

Uwaga.
Wykres funkcji odwrotnej $x = f^{-1}(y)$ otrzymamy z wykresu funkcji $y = f(x)$ odbijając go symetrycznie względem prostej $y = x$.

Funkcja odwrotna do funkcji rosnącej (malejącej) jest rosnąca (malejąca).

Fakt 1.10.
Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie różnowartościowa i 'na'. Wtedy

$$\forall x \in X \quad f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \forall y \in Y \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Przykład 2.2.
Wyznaczymy funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$.

2. Przegląd ważniejszych klas funkcji.

2.1. Funkcje elementarne.

Podstawowe funkcje elementarne obejmują funkcje: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne.

Funkcje, które można otrzymać z podstawowych funkcji elementarnych za pomocą skończonej ilości działań arytmetycznych oraz operacji złożenia funkcji nazywamy funkcjami elementarnymi.

2.1.1. Wielomian i funkcja wymierna.

Wielomianem stopnia $n \in N \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W : R \to R$ postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_i \in R$, $0 \le i \le n$, $a_n \neq 0$.

Funkcję, którą można zapisać w postaci ilorazu dwóch wielomianów nazywamy funkcją wymierną. Dziedzina funkcji wymiernej to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem miejsc zerowych mianowanika.

2.1.2. Funkcja potęgowa.

Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci $f(x) = x^r$, gdzie $r \in R$. Dziedzina funkcji potęgowej zależy od wykładnika r, np.

- $r \in N \cup \{0\} \quad \Rightarrow \quad D_f = R$,
- $r \in Z \setminus (N \cup \{0\}) \quad \Rightarrow \quad D_f = R \setminus \{0\}$,
- $(r \in R \setminus Z \;\; \wedge \;\; r > 0) \quad \Rightarrow \quad D_f = R_+ \cup \{0\}$,
- $(r \in R \setminus Z \;\; \wedge \;\; r < 0) \quad \Rightarrow \quad D_f = R_+$.

Funkcje $y = x^n$ i $y = x^{\frac{1}{n}}$ są w przedziale $[0, \infty)$ wzajemnie odwrotne.

2.1.3. Funkcja wykładnicza.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję $f : R \to (0, \infty)$ postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$.

2.1.4. Funkcja logarytmiczna.

Logarytm liczby dodatniej $b > 0$ przy podstawie a, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b, tj.

$$z = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^z = b.$$

Z definicji logarytmu wynika

- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_a a = 1$.

Oznaczamy

- $\log_{10} b = \log b$ - logarytm dziesiętny,
- $\log_e b = \ln b$ - logarytm naturalny, $e \approx 2,7182$.

Własności logarytmów:

Niech $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $r \in R$.

- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,
- $r \log_a b = \log_a b^r$,
- $\log_b c = \log_b a \cdot \log_a c$, czyli $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$, przy $b \neq 1$.

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję $f : (0, \infty) \to R$ postaci

$f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$.

Funkcje $y = a^x$ i $y = \log_a x$ są wzajemnie odwrotne.

2.1.5. Funkcje trygonometryczne.

$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x$

$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ (secans) , $\quad y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ (cosecans)

2.1.6. Funkcje cyklometryczne (kołowe).

Funkcje cyklometryczne to funckcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych.

- $f(x) = \arcsin x$ (arcussinus) to funkcja odwrotna do funkcji sinus obciętej do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\quad D_f = [-1, 1]$, $\quad W_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- $f(x) = \arccos x$ (arcuscosinus) to funkcja odwrotna do funkcji cosinus obciętej do przedziału $[0, \pi]$, $\quad D_f = [-1, 1]$, $\quad W_f = [0, \pi]$;
- $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ (arcustangens) to funkcja odwrotna do funkcji tangens obciętej do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\quad D_f = R$, $\quad W_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
- $f(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$ (arcuscotangens) to funkcja odwrotna do funkcji cotangens obciętej do przedziału $(0, \pi)$, $\quad D_f = R$, $\quad W_f = (0, \pi)$.

2.2. Funkcje nieelementarne.

2.2.1. Część całkowita.

Funkcją część całkowita nazywamy funkcję $E : R \to Z$ zadaną wzorem

$$E(x) = k \quad dla \quad k \leq x < k+1, \quad k \in Z.$$

Część całkowita liczby x jest największą liczbą całkowitą nie większą od x.

2.2.2. Funkcja signum.

Funkcją signum nazywamy funkcję $sgn : R \to \{-1, 0, 1\}$ określoną następująco:

- $sgn(x) = -1$ dla $x < 0$,
- $sgn(x) = 0$ dla $x = 0$,
- $sgn(x) = 1$ dla $x > 0$.

2.2.3. Funkcja Dirichleta.

Funkcją Dirichleta nazywamy funkcję $D : R \to \{0, 1\}$ określoną następująco:

- $D(x) = 1$ dla $x \in Q$,
- $D(x) = 0$ dla $x \notin Q$.