III. Ciągi liczbowe.

1. Definicja ciągu liczbowego.

Definicja 1.1.
Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję $a : N \to R$ odwzorowującą zbiór liczb naturalnych N w zbiór liczb rzeczywistych R i oznaczamy przez $\{a_n\}$. Używamy zapisu

$$a_n = a(n).$$

Ciąg $\{a_n\}$ można też zapisywać w postaci

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Liczbę a_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu $\{a_n\}$.

Przykłady określania ciągów liczbowych:.

- wzorem, np.

$$a_n = 3^n, \quad b_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}, \quad c_n = 1 + 2^2 + 3^3 + ... + n^n;$$

- rekurencyjnie, np.

  $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 2$ ciąg arytmetyczny,

  $b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 3b_n$ ciąg geometryczny;

- opisowo, np.

  a_n - n-ta liczba pierwsza.

Przykłady ciągów liczbowych:.

- ciąg liczb parzystych dodatnich $a_n = 2n$;
- ciąg liczb nieparzystych dodatnich $a_n = 2n - 1$;
- ciąg arytmetyczny $a_n = p + (n-1)d$ (p - pierwszy wyraz ciągu, d - różnica ciągu);
- ciąg geometyczny $a_n = pq^{n-1}$ (p - pierwszy wyraz ciągu, q - iloraz ciągu);
- ciąg stały $a_n = c$ (c - dowolna liczba);
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
- $-1, +1, -1, +1, ..., (-1)^n$;
- $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, ..., \sqrt[n]{n}$.

2. Monotoniczność i ograniczoność ciągu liczbowego.

Definicja 2.1.
Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest:

- rosnący, jeżeli dla każdego $n \in N$
$$a_n < a_{n+1}$$
- niemalejący, jeżeli dla każdego $n \in N$
$$a_n \leq a_{n+1}$$
- malejący, jeżeli dla każdego $n \in N$
$$a_n > a_{n+1}$$
- nierosnący, jeżeli dla każdego $n \in N$
$$a_n \geq a_{n+1}.$$

Ciągi rosnące, niemalejące, malejące i nierosnące nazywamy ciągami *monotonicznymi*. Można mówić o ciągach monotonicznych od pewnego miejsca tj. pewnego numeru $n_0 \in N$.

Uwaga.

Monotoniczność dowolnego ciągu $\{a_n\}$ można ustalić badając znak różnicy

$$a_{n+1} - a_n,$$

a ciągu $\{b_n\}$ o wyrazach dodatnich porównując iloraz

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

z liczbą 1.

Przykład.

Sprawdzimy, że ciąg $a_n = n^2 - n$ jest rosnący. Otrzymujemy

$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n > 0$

dla wszystkich $n \in N$. Zatem $a_n < a_{n+1}$ dla $n \in N$.

Przykład.

Sprawdzimy, że ciąg $b_n = \frac{n!}{n^n}$ jest malejący. Ponieważ $b_n > 0$ dla wszystkich $n \in N$ badamy iloraz $\frac{b_{n+1}}{b_n}$. Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1,$$

dla wszystkich $n \in N$. Zatem $b_{n+1} < b_n$ dla $n \in N$.

Definicja 2.2.

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy *ograniczonym*, jeżeli istnieją takie liczby m_1 i m_2, że dla wszystkich $n \in N$

$$m_1 \leq a_n \leq m_2,$$

lub równoważnie, jeżeli istnieje taka liczba $M > 0$, że dla wszystkich $n \in N$

$$|a_n| \leq M.$$

3. Granica ciągu liczbowego.

Definicja 3.1.
Liczbę g nazywamy granicą ciągu $\{a_n\}$, jeżeli dla dowolnego $\epsilon > 0$ można dobrać taką liczbę $n_0 \in N$, że dla każdego $n > n_0$ zachodzi nierówność

$$|a_n - g| < \epsilon,$$

zapisywana równoważnie w postaci

$$g - \epsilon < a_n < g + \epsilon.$$

Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do granicy g, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Ciągi posiadające granicę nazywamy ciągami zbieżnymi.

Twierdzenie 3.2. (o jednoznaczności granicy)
Ciąg zbieżny nie może mieć dwóch różnych granic.

Przykłady 'ważnych' ciągów zbieżnych:

- $\lim_{n\to\infty} c = c$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;
- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \text{dla} \quad |q| < 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla} \quad a > 0$;;
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281$

Przykład.

(a) Wykażemy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Zgodnie z definicją należy pokazać, że

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ \ \forall N \ni n > n_0 \quad |\frac{n}{n+1} - 1| < \epsilon.$$

Weźmy dowolny $\epsilon > 0$. Nierówność epsilonową $|\frac{n}{n+1} - 1| < \epsilon$ rozwiązujemy ze względu na n.

Otrzymujemy

$$|\frac{n}{n+1} - 1| < \epsilon \ \Leftrightarrow \ n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}.$$

Zatem przyjmując $n_0 := [\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + 1]$, gdzie symbol $[x]$ oznacza część całkowitą z liczby x, otrzymamy, że dla wszystkich $n > n_0$ zachodzi nierówność

$$|\frac{n}{n+1} - 1| < \epsilon.$$

(b) Rozważmy ciąg $a_n = 2 \cdot (-1)^n$. Mamy $a_{2n} = 2$, $a_{2n-1} = -2$ dla $n \in N$. Przypuśćmy, że ciąg $\{a_n\}$ ma granicę $g < 2$. Wtedy przyjmując $\epsilon = \frac{2-g}{2}$ otrzymujemy, że żaden wyraz a_{2n} nie spełnia nierówności

$$|a_{2n} - g| < \epsilon,$$

czyli g nie może być granicą ciągu $\{a_n\}$. Podobnie pokazuje się, że granicą nie może być żadna liczba $g \geq 2$. Zatem granica ciągu $\{a_n\}$ nie istnieje.

4. Twierdzenia o ciągach zbieżnych.

Twierdzenie 4.1. (o jednoznaczności granicy)
Ciąg zbieżny nie może mieć dwóch różnych granic.

Twierdzenie 4.2.
Ciąg zbieżny jest ograniczony.

Twierdzenie 4.3.
Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Twierdzenie 4.4. (o arytmetyce granic)
Załóżmy, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne, tzn. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Wówczas

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$;
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$;
3. $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$;
4. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, o ile $b_n \neq 0$;
6. $\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = (\lim_{n\to\infty} a_n)^p$, gdzie $p \in Z \setminus \{0\}$;
7. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$, gdzie $k \in N \setminus \{0, 1\}$.

W dwóch ostatnich wzorach zakłada się, że wyrażenia po obu stronach równości mają sens.

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \frac{n^4+5n-1}{3n^4-2n^2} + \frac{4^n+3^n}{8^n+7^n} \right)$.

Twierdzenie 4.5. (o trzech ciągach)
Jeżeli ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ spełniają warunki:

(i) $a_n \leq b_n \leq c_n \quad$ dla $\quad n \geq n_0 \quad$ (n_0 - pewna liczba naturalna);

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$,

to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$.

Twierdzenie 4.6.
Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i ciąg b_n jest ograniczony, to

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin n}{n^2+1}$.

Twierdzenie 4.7.
Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry.

Wniosek 4.7.
Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny.

Definicja 4.8.
Granicę ciągu $\{e_n\}$ oznaczamy przez e, tj.

$$\lim n \to \infty \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

5. Ciągi rozbieżne do nieskończoności.

Definicja 5.1.
Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do nieskończoności, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

jeżeli dla dowolnej liczby M można dobrać taką liczbę naturalną n_0, że dla wszystkich $n > n_0$ zachodzi nierówność $a_n > M$.
Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do minus nieskończoności, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

jeżeli dla dowolnej liczby M można dobrać taką liczbę naturalną n_0, że dla wszystkich $n > n_0$ zachodzi nierówność $a_n < M$.
Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$, to mówimy, że ciąg ten ma granicę niewłaściwą.

Przykład.
Pokażemy, że ciąg $a_n = n^3 + 2$ jest rozbieżny do $+\infty$. Weźmy dowolną liczbę M. Należy tak dobrać n_0, aby dla $n > n_0$ zachodziła nierówność $n^3 + 2 > M$. Mamy $n^3 + 2 \geq n + 2 > M$ o ile $n > M - 2$. Wystarczy więc przyjąć $n_0 = [M - 1]$.

Twierdzenie 5.2.

1. Jeżeli $a_n \to 0$ i $a_n > 0$, to $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.
2. Jeżeli $a_n \to 0$ i $a_n < 0$, to $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.
3. Jeżeli $a_n \to \pm\infty$ i $a_n > 0$, to $\frac{1}{a_n} \to 0$.
4. Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $b_n \to b > 0$, to $a_n \cdot b_n \to +\infty$.
5. Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $b_n \to b < 0$, to $a_n \cdot b_n \to -\infty$.
6. Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $b_n \to +\infty$, to $a_n + b_n \to +\infty$.
7. Jeżeli $a_n \to +\infty$ i $\{b_n\}$ jest ograniczony, to $a_n + b_n \to +\infty$.

Uwaga.
Jeżeli $c_n = a_n \cdot b_n$ oraz $a_n \to 0$ i $b_n \to +\infty$, to bezpośrednio z takiej postaci ciągu c_n nie można nic wywnioskować na temat granicy tego ciągu. O ciągu $\{c_n\}$ mówimy, że jest ciągiem typu $0 \cdot \infty$ lub nieoznaczonością typu $0 \cdot \infty$.

Wyróżniamy następujące symbole nieoznaczone :

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n} - n)$.

Twierdzenie 5.3. (o dwóch ciągach)
Załóżmy, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają nierówność $a_n \leq b_n$ dla $n \geq n_0$, gdzie n_0 - pewna liczba naturalna.

1. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
2. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Przykład.
Wykażemy, że $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$.

Twierdzenie 5.4.
Jeżeli $a_n > 0$ dla $n \in N$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Przykład.
Obliczymy $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^n$.