V. Granica funkcji jednej zmiennej.

1. Definicja granicy właściwej i niewłaściwej funkcji.

Definicja 1.1. (sąsiedztwa punktu i sąsiedztwa nieskończoności)
Niech $x_0 \in R$, $r > 0$, $a, b \in R$. Definiujemy

- $S(x_0, r) := (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ - sąsiedztwo o promieniu r punktu x_0;
- $S(x_0^-, r) := (x_0 - r, x_0)$ - sąsiedztwo lewostronne o promieniu r punktu x_0;
- $S(x_0^+, r) := (x_0, x_0 + r)$ - sąsiedztwo prawostronne o promieniu r punktu x_0;
- $S(-\infty) := (-\infty, b)$ - sąsiedztwo $-\infty$;
- $S(+\infty) := (a, +\infty)$ - sąsiedztwo $+\infty$.

Definicja 1.2. (granicy właściwej w punkcie)

(i) Niech $x_0 \in R$ i niech f będzie funkcją określoną przynajmniej na pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0. Liczbę g nazywamy *granicą właściwą* funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu punktów $\{x_n\} \subset S(x_0)$ takiego, że $x_n \to x_0$, gdy $n \to \infty$ zachodzi warunek $f(x_n) \to g$, gdy $n \to \infty$, tzn.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall \{x_n\} \subset S(x_0) \ \ (\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g)\right].$$

(ii) Niech $x_0 \in R$ i niech f będzie funkcją określoną przynajmniej na pewnym sąsiedztwie lewostronnym $S(x_0^-)$ punktu x_0. Liczbę g nazywamy *granicą lewostronną właściwą* funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu punktów $\{x_n\} \subset S(x_0^-)$ takiego, że $x_n \to x_0$, gdy $n \to \infty$ zachodzi warunek $f(x_n) \to g$, gdy $n \to \infty$, tzn.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall \{x_n\} \subset S(x_0^-) \ \ (\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g)\right].$$

(iii) Niech $x_0 \in R$ i niech f będzie funkcją określoną przynajmniej na pewnym sąsiedztwie prawostronnym $S(x_0^+)$ punktu x_0. Liczbę g nazywamy *granicą prawostronną właściwą* funkcji f w punkcie x_0, co zapisujemy

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu punktów $\{x_n\} \subset S(x_0^+)$ takiego, że $x_n \to x_0$, gdy $n \to \infty$ zachodzi warunek $f(x_n) \to g$, gdy $n \to \infty$, tzn.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall \{x_n\} \subset S(x_0^+) \ \ (\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g)\right].$$

Przykład 5.1.

Wykażemy, że $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

Niech $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ punktów leżących w $S(1)$ taki, że $x_n\to 1$, gdy $n\to\infty$. Wtedy otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-1}{x_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-1}=\lim_{n\to\infty}(x_n+1)=1+1=2.$$

Zatem wobec definicji 1.2 (i) mamy $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

Przykład 5.2.

Wykażemy, że $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ nie istnieje.

Niech $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. Weźmy dwa konkretne ciągi $x_n=\frac{1}{n\pi}$ oraz $y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$.

Oczywiście $x_n, y_n\subset S(0)$ oraz $x_n\to 0$ i $y_n\to 0$, gdy $n\to\infty$. Otrzymujemy natomiast

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Zatem ponieważ ciągi $\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ dążą do dwóch różnych granic, więc zgodnie z definicją 1.2 (i) nie istnieje granica $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Definicja 1.3. (granicy niewłaściwej w punkcie)

(i) Niech $x_0 \in R$ i niech f będzie funkcją określoną przynajmniej na pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall \{x_n\} \subset S(x_0) \ \ (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty)\right].$$

(ii) Niech $x_0 \in R$ i niech f będzie funkcją określoną przynajmniej na pewnym sąsiedztwie lewostronnym $S(x_0^-)$ punktu x_0.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall \{x_n\} \subset S(x_0^-) \ \ (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty)\right].$$

(iii) Niech $x_0 \in R$ i niech f będzie funkcją określoną przynajmniej na pewnym sąsiedztwie prawostronnym $S(x_0^+)$ punktu x_0.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall \{x_n\} \subset S(x_0^+) \ \ (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty)\right].$$

Przykład 5.3.

Wykażemy, że $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

Niech $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ punktów leżących w $S(2^+)$ taki, że $x_n \to 2$, gdy $n \to \infty$. Wtedy otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n - 2} = +\infty.$$

Zatem wobec definicji 1.3 (iii) mamy $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

Definicja 1.4. (granicy właściwej i niełaściwej w ∞)

(i) Niech f będzie funkcją określoną przynajmniej w sąsiedztwie $S(\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall\{x_n\} \subset S(\infty) \ \ (\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g)\right].$$

(ii) Niech f będzie funkcją określoną przynajmniej w sąsiedztwie $S(\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall\{x_n\} \subset S(\infty) \ \ (\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty)\right].$$

Przykład 5.4.

Wykażemy, że $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+2} = 0$.

Niech $f(x) = \frac{2}{x+2}$.

Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ punktów leżących w $S(\infty)$ taki, że $x_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$.

Wtedy otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{x_n + 2} = 0.$$

Zatem wobec definicji 1.4 (i) mamy $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+2} = 0$.

Twierdzenie 1.5. (warunek konieczny i dostateczny istnienia granicy w punkcie)
Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą bądź niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Wspólna wartość granic jednostronnych jest wówczas granicą funkcji.

Przykład 5.5.
Sprawdzimy, czy istnieje granica funkcji $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ w punkcie $x_0 = 0$.

2. Twierdzenia o granicach właściwych funkcji.

Twierdzenie 2.1. (o arytmetyce granic)

Załóżmy, że funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0. Wówczas

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$,
3. $\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x), \quad c\in R$,
4. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$,
5. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, o ile $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,
6. $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, o ile wyrażenia po obu stronach równości mają sens.

Przykłady 5.6.

Uwaga.
Własności (1)-(6) są prawdziwe dla granic jednostronnych funkcji w punkcie oraz dla granic w $\pm\infty$.

Twierdzenie 2.2. (o trzech funkcjach)

Jeżeli funkcje f, g i h spełniają warunki:

(i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla wszystkich $x \in S(x_0)$,

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = q$,

to $\lim_{x \to x_0} g(x) = q$.

Przykład 5.7.
Obliczymy $\lim_{x \to 0} x^2(2 + \cos \frac{1}{x})$.

Wniosek 2.3.

Jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ i funkcja $g(x)$ jest ograniczona, to

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Twierdzenie 2.4. (o granicy funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$,

(ii) $f(x) \neq x_0$ dla wszystkich $x \in S(x_0)$,

(iii) $\lim_{y\to y_0} g(y) = q$,

to $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = q$.

Uwaga.

Twierdzenie o trzech funkcjach, wniosek 2.3 i twierdzenie o granicy funkcji złożonej zachodzą dla pozostałych typów granic funkcji.

Przykłady 5.8.

3. Twierdzenia o granicach niewłaściwych funkcji.

Twierdzenie 3.1. (o dwóch funkcjach)

Załóżmy, że funkcje f i g spełniają nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla wszystkich $x \in S(x_0)$.

(i) Jeżeli $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, to $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

(ii) Jeżeli $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, to $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Przykład 5.9.

Obliczymy $\lim_{x\to 0^+} \frac{2+\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$.

Twierdzenie 3.2. (o granicach niewłaściwych - zapis symboliczny)

1. $p + \infty = \infty$ dla $-\infty < p \leq +\infty$,
2. $p \cdot \infty = \infty$ dla $0 < p \leq +\infty$,
3. $\frac{p}{\infty} = 0$ dla $-\infty < p < +\infty$,
4. $\frac{p}{0^+} = \infty$ dla $0 < p \leq +\infty$,
5. $p^\infty = 0$ dla $0^+ \leq p < 1$,
6. $p^\infty = \infty$ dla $1 < p \leq \infty$,
7. $\infty^q = 0$ dla $-\infty \leq q < 0$,
8. $\infty^q = \infty$ dla $0 < q \leq \infty$.

Przykłady 5.10.

Symbole

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

nazywamy symbolami nieoznaczonymi.

Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych.

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
- $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$,
- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \quad a>0$,
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$,
- $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}, \quad a>0,\ a\neq 1$,
- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,
- $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,
- $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Przykład 5.11.

4. Asymptoty funkcji.

Definicja 4.1.
Prosta $x = a$ jest *asymptotą pionową*

- lewostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty;$$

- prawostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty;$$

- obustronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

Uwaga. (lokalizacja asymptot pionowych)
Funkcja elementarna może mieć asymptoty pionowe tylko w skończonych krańcach swojej dziedziny, które do niej nie należą.

Przykład 5.12.
Sprawdzimy, czy prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową funkcji $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{e^x-1}$.

Przykład 5.13.
Sprawdzimy, czy prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Definicja 4.2.
Prosta $y = Ax + B$ jest *asymptotą ukośną* funkcji f w $\pm\infty$, jeżeli

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (Ax + B)] = 0.$$

Jeżeli $A = 0$, to prostą $y = B$ nazywamy *asymptotą poziomą* funkcji f.

Fakt 4.3.
Prosta $y = Ax + B$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $\pm\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad B = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - Ax].$$

Fakt 4.4.
Prosta $y = B$ jest asymptotą poziomą funkcji f w $\pm\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$B = \lim_{x\to\pm\infty} f(x).$$

Przykład 5.14.
Znajdziemy asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x}{1-x}$.