VII. Pochodna i różniczka funkcji jednej zmiennej.

1. Definicja pochodnej funkcji i jej interpretacja fizyczna. Istnienie pochodnej funkcji.

Niech $x_0 \in R$ i niech f będzie funkcją określoną przynajmniej na pewnym otoczeniu $O(x_0, r)$, $r > 0$ punktu x_0.

Definicja 1.1 (ilorazu różnicowego)

Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi $\Delta x \quad (0 < |\Delta x| < r)$ zmiennej niezależnej nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

czyli stosunek przyrostu funkcji do odpowiadającego mu przyrostu argumentu.

Geometrycznie : Iloraz różnicowy jest tangensem kąta φ nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ do dodatniej części osi Ox, tj.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Definicja 1.2 (pochodnej właściwej funkcji)
Pochodną właściwą funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, gdy $\Delta x \to 0$ i oznaczamy przez $f'(x_0)$, tj.

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Inny równoważny zapis definicji

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Do oznaczenia pochodnej funkcji f w punkcie x_0 stosuje się również symbole

$$\frac{df}{dx}(x_0), \qquad Df(x_0).$$

Interpretacja geometryczna pochodnej : Pochodna funkcji f w punkcie x_0 przedstawia tangens kąta α, jaki z dodatnią częścią osi Ox tworzy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, tj.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Fakt 1.3 (równanie stycznej)
Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0.)$$

Przykład 7.1
Dana jest funkcja $y = f(x) = x^2$.

(a) Korzystając z definicji obliczyć pochodną funkcji f w punkcie $x_0 \in R$.

(b) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(2, 4)$.

Interpretacje fizyczne pochodnej.

1. Niech $s(t)$ oznacza położenie na osi punktu materialnego w chwili t. Wtedy iloraz różnicowy $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ jest prędkością średnią punktu, zaś pochodna $s'(t_0)$ prędkością chwilową punktu w chwili t_0.

2. Niech $v(t)$ oznacza prędkość punktu materialnego w chwili t. Wtedy iloraz różnicowy $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ jest przyspieszeniem średnim punktu, zaś pochodna $v'(t_0)$ przyspieszeniem chwilowym punktu w chwili t_0.

3. Niech $Q(t)$ oznacza ilość ładunków, jaka w przedziale czasowym $[0, t]$ przepłynęła przez ustalony przekrój przewodnika. Wtedy iloraz różnicowy $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ jest natężeniem średnim prądu, zaś pochodna $Q'(t_0)$ natężeniem chwilowym prądu w chwili t_0.

4. Niech $W(\theta)$ oznacza ilość ciepła, której potrzeba, aby ogrzać ciało od temperatury O^o do temperatury θ. Wtedy iloraz różnicowy $\frac{\Delta W}{\Delta \theta}$ jest średnią pojemnością cieplną, zaś pochodna ilości ciepła względem temperatury $W'(\theta_0)$ jest pojemnością cieplną ciała.

Fakt 1.4. (warunek konieczny i wystarczający istnienia pochodnej)
Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, gdzie

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

oznaczają odpowiednio pochodną lewostronną i pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0.

Wspólna wartość pochodnych jednostronnych jest wartością pochodnej, tj.

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

Przykład 7.2.
Sprawdzimy, że funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$.

Fakt 1.5. (warunek konieczny istnienia pochodnej)
Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to f jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga.
Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, np. funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, a pochodna $f'(0)$ nie istnieje.

Definicja 1.6. (funkcji różniczkowalnej)

(i) Funkcję posiadającą pochodną właściwą w punkcie x_0 nazywamy *funkcją różniczkowalną* w tym punkcie.

(ii) Funkcją różniczkowalną w przedziale otwartym (a, b), gdzie $-\infty \le a < b \le \infty$, nazywamy funkcję różniczkowalną w każdym punkcie tego przedziału.

(iii) Funkcją różniczkowalną w przedziale domkniętym $[a, b]$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$, nazywamy funkcję różniczkowalną w przedziale (a, b) oraz prawostronnie różniczkowalną w punkcie a i lewostronnie różniczkowalną w punkcie b.

Definicja 1.7.
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym przedziale, to funkcję na nim określoną, której wartości w punktach x tego przedziału są równe $f'(x)$, nazywamy pochodną funkcji f na danym przedziale i oznaczamy przez f' lub $\frac{df}{dx}$.

Pochodne funkcji elementarnych:

- $(c)' = 0, \quad c \in R,$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ dla $x \in R$, gdzie $n \in N$,
- $(x^p)' = px^{p-1}$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, gdzie $p \in \{-1, -2, -3, ...\}$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, gdzie $\alpha \in R \setminus Z$, zakres zmiennej x zależy od α,
- $(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in R$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in R$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in Z,$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ dla $x \in (k\pi, \pi + k\pi), \quad k \in Z,$
- $(a^x)' = a^x \ln a$ dla $x \in R, \quad 0 < a \neq 1,$
- $(e^x)' = e^x$ dla $x \in R,$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1),$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1),$
- $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in R,$
- $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in R,$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ dla $x > 0,$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ dla $x > 0, \quad 0 < a \neq 1.$

2. Twierdzenia o pochodnych funkcji.

Twierdzenie 2.1.
Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie $x \in R$. Wtedy

1. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$,
2. $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$,
3. $[c \cdot f(x)]' = c\dot{f}'(x), \quad c \in R$,
4. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
5. $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad$ o ile $\quad g(x) \neq 0$.

Przykłady 7.3.

Twierdzenie 2.2. (pochodna funkcji złożonej)
Jeżeli funkcja $y = f(u)$ jest różniczkowalna w punkcie u_0, zaś funkcja $u = g(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz $u_0 = g(x_0)$ i $g(x) \neq g(x_0)$ dla $x \neq x_0$, to funkcja złożona $f \circ g$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz zachodzi wzór

$$(f \circ g)'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

Zatem 'pochodna funkcji złożonej jest iloczynem pochodnej funkcji zewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej'.

Przykłady 7.4.

Twierdzenie 2.3. (pochodna funkcji odwrotnej)
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

(i) f jest ciągła na otoczeniu $O(x_0)$,

(ii) f jest ściśle monotoniczna na otoczeniu $O(x_0)$,

(iii) f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i $f'(x_0) \neq 0$,

to

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

gdzie $y_0 = f(x_0)$.

Przykład 7.5.

Pokażemy, że

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Zauważmy, że funkcja $y = \operatorname{arc\,tg} x$ jest funckją odwrotną względem funkcji $x = \operatorname{tg} y$ dla $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.
Zatem

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} == \frac{1}{x^2+1}.$$

Definicja 2.4. (pochodna logarytmiczna)
Niech $y = f(x)$ będzie funkcją o wartościach dodatnich w przedziale (a, b), gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$.
Wyrażenie

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y},$$

gdzie ' oznacza pochodną względem zmiennej x, nazywamy pochodną logarytmiczną.

Przykład 7.6.
Obliczymy pochodną funkcji

$$y = (\sin x)^{\cos x}.$$

3. Różniczka funkcji.

Defnicja 3.1.
Niech funkcja f będzie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in R$. *Różniczką* funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ (inne oznaczenia na 'mały' przyrost zmiennej niezależnej : $\Delta x = dx = h$) określoną wzorem

$$df(\Delta x) := f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Twierdzenie 3.2.
Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała A, że przyrost funkcji $\Delta f = f(x_0+h)-f(x_0)$ jest równy $o(h)+A\cdot h$.

Uwaga.
Mówimy, że funkcja $g(x)$ jest $o(x)$, jeśli

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0,$$

tzn. $g(x)$ dąży do zera szybciej niż x.

Twierdzenie 3.3. (zastosowanie różniczki)
Jeśli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Przy czym błąd jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji
$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ jej różniczką $df = f'(x_0)\Delta x$
jest $o(\Delta x)$, tzn.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0.$$

Przykład 7.7.
Korzystając z różniczki funkcji obliczymy przybliżoną wartość wyrażenia $\operatorname{arc\,tg} 1.05$.

4. Pochodne i różniczki wyższych rzędów.

Defnicja 4.1.
Pochodną właściwą rzędu n funkcji f w punkcie x_0 nazywamy pochodną z pochodnej rzędu $n-1$, tj.

$$f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}\right]'(x_0).$$

Oznaczamy $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, $f^{(4)} = f^{IV}$, $f^{(n)}$ dla $n \geq 5$.
Przyjmuje się, że $f^{(0)} = f$.

Defnicja 4.2.
Różniczką rzędu n funkcji f nazywamy różniczkę z różniczki rzędu $n-1$, tj.

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Mamy więc $df = f'(x)dx, \quad d^2 f = f''(x)(dx)^2 \quad ... \quad d^n f = f^{(n)}(x)(dx)^n.$

Przykład 7.8.
Dla funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ obliczyć f'''.

Przykład 7.9.
Dla funkcji $f(x) = e^{-3x}$ wyznaczyć wzór na pochodną rzędu n.

Przykład 7.10.
Dla funkcji $f(x) = x \sin x^2$ wyznaczyć różniczkę rzędu 2.