VIII. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania funkcji.

1. Twierdzenia o wartości średniej. Monotoniczność funkcji.

Twierdzenie 1.1. (Rolle'a)

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, tj. w przedziale otwartym (a, b), oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = 0.$$

Geometrycznie : Na wykresie funkcji spełniającej założenia twierdzenia Rolle'a istnieje punkt, w którym styczna jest pozioma.

Twierdzenie 1.2. (Lagrange'a)

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, tj. w przedziale otwartym (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrycznie : Na wykresie funkcji spełniającej założenia twierdzenia Lagrange'a istnieje punkt, w którym styczna jest równoległa do siecznej wykresu przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Twierdzenie 1.3. (warunki wystarczające monotoniczności funkcji)

Niech $I \subset R$ oznacza przedział na prostej. Jeżeli dla każdego $x \in I$ funkcja f spełnia warunek:

(i) $f'(x) = 0$, to f jest stała na I.

(ii) $f'(x) > 0$, to f jest rosnąca na I.

(iii) $f'(x) \geq 0$, to f jest niemalejąca na I.

(iv) $f'(x) < 0$, to f jest malejąca na I.

(v) $f'(x) \leq 0$, to f jest nierosnąca na I.

Dowód.

(ii) Załóżmy, że $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in I$. Weźmy dowolne dwa punkty $x_1, x_2 \in I$ takie, że $x_1 < x_2$. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a 1.2 mamy dla pewnego $c \in (x_1, x_2)$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Zatem skoro $f'(c) > 0$, to

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Stąd wobec $x_1 < x_2$, czyli $x_2 - x_1 > 0$, dostajemy

$$f(x_2) - f(x_1) > 0, \quad \textit{czyli} \quad f(x_2) > f(x_1).$$

Przykład 8.1.

Wyznaczymy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = (x + 1)\, e^{2x}$.

2. Reguła de L'Hospitala.

Twierdzenie 2.1.

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0)$,

(ii) istnieje granica (właściwa bądź niewłaściwa)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

to wówczas istnieje granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

oraz

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga.

- Twierdzenie 2.1 jest prawdziwe także po zastąpieniu warunku (i) warunkiem

  (i)' $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

- Reguła de L'Hospitala jest prawdziwa także dla granic jednostronnych i granic w $\pm\infty$.
- Inne symbole nieoznaczone sprowadzamy do nieoznaczoności typu

  $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Tożsamości zmieniające rodzaj nieoznaczoności.

- Nieoznaczoność $[0 \cdot \infty]$ sprowadzamy do nieoznaczoności $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ stosując przekształcenie
$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}.$$
- Nieoznaczoność $[\infty - \infty]$ sprowadzamy do nieoznaczoności $\left[\frac{0}{0}\right]$ stosując przekształcenie
$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}.$$
- Nieoznaczoności $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$ sprowadzamy do nieoznaczoności $[0 \cdot \infty]$ stosując przekształcenie
$$f^g = e^{g \ln f}.$$

Przykłady 8.2.

Obliczymy a. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, b. $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$, c. $\lim_{x\to 1^+} x^{\ln(x-1)}$.

3. Wzór Taylora i Maclaurina.

Definicja 3.1.

Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną właściwą k-tego rzędu, gdzie $k \in N \cup \{0\}$. Wielomian

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazywamy *wielomianem Taylora rzędu k* funkcji f w punkcie x_0.

Dla $x_0 = 0$ wielomian ten nazywamy *wielomianem Maclaurina.*

Twierdzenie 3.2. (Taylora)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

(i) f ma ciągłą pochodną rzędu $n - 1$ w przedziale $[x_0, x]$ **(**lub w $[x, x_0]$**)**,

(ii) f ma pochodną właściwą rzędu n w przedziale (x_0, x) **(**lub w (x, x_0)**)**,

to istnieje taki punkt $c \in (x_0, x)$ **(**lub odpowiednio $c \in (x, x_0)$**)**, że

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x),$$

gdzie

$$R_n(x) := \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Uwaga.

Wzór z twierdzenia 3.2 nazywamy *wzorem Taylora z n-tą resztą Lagrange'a.*

Dla $x_0 = 0$ wzór Taylora przybiera postać

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n,$$

gdzie $c \in (0, x)$ dla $x > 0$ lub $c \in (x, 0)$ dla $x < 0$ i nosi nazwę *wzoru Maclaurina.*

Przykłady 8.3.

Napiszemy wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla funkcji

a. $f(x) = \ln(1+x), \quad x_0 = 0, \quad n = 5;$

Obliczamy

$$f(x) = \ln(1+x), \qquad f(0) = 0;$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \qquad f'(0) = 1;$$
$$f''(x) = -(1+x)^{-2}, \qquad f''(0) = -1;$$
$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}, \qquad f'''(0) = 2;$$
$$f^{Iv}(x) = -6(1+x)^{-4}, \qquad f^{(Iv)}(0) = -6;$$
$$f^{(5)}(x) = 24(1+x)^{-5}, \qquad f^{(5)}(c) = 24(1+c)^{-5}, \qquad c \in (0,x).$$

Podstawiając do wzoru Maclaurina dostajemy

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \frac{24(1+c)^{-5}}{5!}x^5 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+c)^5},$$

gdzie $c \in (0,x)$.

b. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 1, \quad n = 3.$

Obliczamy

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}, \qquad f(1) = 1;$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}, \qquad f'(1) = -\frac{1}{2};$$
$$f''(x) = 3x^{-\frac{5}{2}}, \qquad f''(1) = 3;$$
$$f'''(x) = -\frac{15}{2}x^{-\frac{7}{2}}, \qquad f'''(c) = -\frac{15}{2}c^{-\frac{7}{2}}, \qquad c \in (1,x).$$

Podstawiając do wzoru Taylora dostajemy

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{2!}(x-1)^2 - \frac{15}{2}c^{-\frac{7}{2}}\frac{(x-1)^3}{3!} = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{3(x-1)^2}{2} - \frac{5(x-1)^3}{4c^{\frac{7}{2}}},$$

gdzie $c \in (1,x)$.

4. Ekstrema funkcji.

Definicja 4.1. (minimum i maksimum lokalnego funkcji)

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$:

(i) *minimum lokalne*, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0, r)$ punktu x_0, że dla każdego $x \in S(x_0, r)$ zachodzi nierówność

$$f(x) \geq f(x_0);$$

(ii) *maksimum lokalne*, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0, r)$ punktu x_0, że dla każdego $x \in S(x_0, r)$ zachodzi nierówność

$$f(x) \leq f(x_0);$$

Definicja 4.2. (minimum i maksimum lokalnego właściwego funkcji)

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in R$:

(i) *minimum lokalne właściwe*, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0, r)$ punktu x_0, że dla każdego $x \in S(x_0, r)$ zachodzi nierówność

$$f(x) > f(x_0);$$

(ii) *maksimum lokalne właściwe*, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0, r)$ punktu x_0, że dla każdego $x \in S(x_0, r)$ zachodzi nierówność

$$f(x) < f(x_0);$$

Minima i maksima lokalne funkcji nazywamy *ekstremami lokalnymi* funkcji.

Twierdzenie 4.3. (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f różniczkowalna w punkcie x_0 posiada w tym punkcie ekstremum lokalne, to

$$f'(x_0) = 0.$$

Innymi słowy:

$f'(x_0)$ istnieje i x_0 jest ekstremum lokalnym funkcji $f \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$

Uwaga.

- Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, np. funkcja $f(x) = x^3$ spełnia w $x_0 = 0$ warunek $f'(0) = 0$, ale nie ma ekstremum w tym punkcie.
- Założenie różniczkowalności, czyli istnienia pochodnej $f'(x_0)$ jest istotne, np. funkcja $f(x) = |x|$ ma w punkcie $x_0 = 0$ minimum lokalne właściwe, ale pochodna $f'(0)$ nie istnieje.

Fakt 4.4.

Funkcja f może mieć ekstremum lokalne tylko w punktach nieróżniczkowalności funkcji f lub w punktach, w których pochodna jest równa 0.

Twierdzenie 4.5. (I warunek wystarczający istnienia ektremum)

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f'(x)$ zmienia znak w punkcie x_0, to w punkcie x_0 funkcja f posiada ektremum lokalne, przy czym jest to maksimum, gdy zmienia znak z $+$ na $-$, zaś minimum, gdy zmienia znak z $-$ na $+$.

Przykład 8.4.

Znajdziemy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Twierdzenie 4.6. (II warunek wystarczający istnienia ektremum)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki

(i) $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

(ii) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

(iii) n jest liczbą parzystą, $n \geq 2$,

to w punkcie x_0 funkcja f ma ektremum lokalne właściwe, przy czym jest to maksimum, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, zaś minimum, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Uwaga.

Jeżeli w twierdzeniu 4.6 warunek (iii) zastąpimy warunkiem

(iii)' n jest liczbą nieparzystą,

to w punkcie x_0 funkcja f nie ma ektremum lokalnego.

Przykład 8.5.

Znajdziemy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = (x - 5)\, e^x$.

Definicja 4.7. (najmniejszej i największej wartości funkcji)

(i) Liczba $m \in R$ jest najmniejszą wartością funkcji f na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli
$$\exists x_0 \in A \quad f(x_0) = m \quad \wedge \quad \forall x \in A \quad f(x) \geq m.$$

(ii) Liczba $M \in R$ jest największą wartością funkcji f na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli
$$\exists x_0 \in A \quad f(x_0) = M \quad \wedge \quad \forall x \in A \quad f(x) \leq M.$$

Algorytm szukania najmniejszej i największej wartości funkcji na przedziale domkniętym $[a, b]$.

Zakładamy, że funkcja f jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna poza skończoną ilością punktów z tego przedziału.

1. Wyznaczamy punkty $c_1, c_2, ..., c_m$ zerowania się pochodnej funkcji f w przedziale otwartym (a, b) oraz punkty $d_1, d_2, ..., d_n$ z przedziału (a, b), w których pochodna funkcji f nie istnieje.

2. Obliczamy wartości funkcji f w punktach a, b, $c_1, c_2, ..., c_m$, $d_1, d_2, ..., d_n$.

3. Spośród liczb
$$f(a), \ f(b), \ f(c_1), \ ..., \ f(c_m), \ f(d_1), \ ..., \ f(d_n)$$
wybieramy wartość najmniejszą i największą. Będą to odpowiednio wartość najmniejsza $m = f_{min}$ i największa $M = f_{max}$ funkcji f na przedziale domkniętym $[a, b]$.

Przykład 8.6.

Znajdziemy najmniejszą f_{min} i największą f_{max} wartość funkcji
$$f(x) = x - 2\sqrt{x}$$
na przedziale $[0, 5]$.

5. Wypukłość i wklęsłość funkcji. Punkt przegięcia.

Definicja 5.1. (funkcji wypukłej)

Mówimy, że funkcja f jest *wypukła* na przedziale $(a, b) \subset D_f$, jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty wykresu tej funkcji leży **nad** tym wykresem z wyjątkiem końców odcinka.

Definicja 5.2. (funkcji wklęsłej)

Mówimy, że funkcja f jest *wklęsła* na przedziale $(a, b) \subset D_f$, jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty wykresu tej funkcji leży **pod** tym wykresem z wyjątkiem końców odcinka.

Definicja 5.3. (punktu przegięcia)

Niech funkcja $f : (a, b) \to R$, $x_0 \in (a, b)$ i niech funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0. Jeżeli funkcja f jest wypukła (wklęsła) na pewnym przedziale $(\alpha, x_0) \subset (a, b)$ oraz wklęsła (wypukła) na pewnym przedziale $(x_0, \beta) \subset (a, b)$, to punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji f.

Twierdzenie 5.4. (warunek wystarczający wypukłości/wklęsłości funkcji)

Załóżmy, że funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale (a, b).

(i) Jeżeli $f''(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest wypukła na (a, b).

(ii) Jeżeli $f''(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest wklęsła na (a, b).

Twierdzenie 5.5. (warunek konieczny istnienia punktu przegięcia wykresu funkcji)

Jeżeli istnieje $f''(x_0)$ i punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f, to

$$f''(x_0) = 0.$$

Uwaga.

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, np. funkcja $f(x) = x^4$ spełnia warunek $f''(x_0) = 0$ dla $x_0 = 0$, ale punkt $(0, 0)$ nie jest punktem przegięcia jej wykresu.

Twierdzenie 5.6. (warunek dostateczny istnienia punktu przegięcia wykresu funkcji)
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

(i) f jest dwukrotnie różniczkowalna na przedziale (a, b),

(ii) $f''(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$,

(iii) f'' zmienia znak przy przechodzeniu przez x_0,

to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.

Przykład 8.7.

Wyznaczyć przedziały wklęsłości/wypukłości oraz znaleźć punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = x^2 \ln x$.

6. Badanie przebiegu zmienności funkcji.

1. Dziedzina funkcji.
2. Podstawowe własności funkcji:
   - parzystość/nieparzystość,
   - okresowość,
   - miejsca zerowe,
   - ciągłość.
3. Granice funkcji na 'krańcach' dziedziny.
4. Asymptoty funkcji.
5. Badanie I-szej pochodnej funkcji:
   - pochodna, jej dziedzina i miejsca zerowe,
   - monotoniczność funkcji,
   - ekstrema lokalne funkcji.
6. Badanie II-giej pochodnej funkcji:
   - druga pochodna, jej dziedzina i miejsca zerowe,
   - wypukłość/wklęsłość funkcji,
   - punkty przegięcia.
7. Tabela.
8. Wykres funkcji.