IX. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej.

1. Całki nieoznaczone.

Niech $f : I \to R$, $I \subset R$ - przedział na prostej.

Definicja 1.1. (funkcji pierwotnej)

Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f na przedziale I, jeżeli dla każdego $x \in I$

$$F'(x) = f(x).$$

Twierdzenie 1.2.

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wówczas:

(i) funkcja $F(x) + C$, gdzie $C \in R$ jest dowolną stałą (stałą całkowania) jest także funkcją pierwotną funkcji f na I,

(ii) każda funkcja pierwotna funkcji f na I może być przedstawiona w postaci $F(x) + C$, gdzie $C \in R$.

Twierdzenie 1.3. (warunek dostateczny istnienia funkcji pierwotnej)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale I, to ma na tym przedziale funkcję pierwotną.

Definicja 1.4. (całki nieoznaczonej)

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I.

Całką nieoznaczoną funkcji f na I nazywamy rodzinę funkcji $F(x)+C$, gdzie $C \in R$ i oznaczamy przez

$$\int f(x)\,dx,$$

tzn.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \Leftrightarrow \qquad F'(x) = f(x).$$

Znalezienie wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f nazywa się jej *całkowaniem*. W wyrażeniu $\int f(x)\,dx$ funkcję f nazywa się *funkcją podcałkową*.

Przykład 9.1.

$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$, bo $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$, $\quad \int e^x\,dx = e^x + C$, bo $(e^x + C)' = e^x$.

Z definicji wynikają następujące własności całki nieoznaczonej:

Fakt 1.5.

(i) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$,

(ii) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C, \quad C \in R$,

(iii) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$,

(iv) $\int c\,f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$.

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

(1) $\int 0\,dx = C, \quad x \in R;$

(2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in N \cup \{0\}, \quad x \in R;$

(3) $\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \in \{-2, -3, -4, ...\}, \quad x \in R \setminus \{0\};$

(4) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \ \alpha \in R \setminus Z,$ zakres zmienności x zależy od wartości α;

(5) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad x \in R \setminus \{0\};$

(6) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1, \quad x \in R;$

(7) $\int e^x\,dx = e^x + C, \quad x \in R;$

(8) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad x \in R;$

(9) $\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad x \in R;$

(10) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \in (k\pi, \pi + k\pi), \quad k \in Z;$

(11) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in Z;$

(12) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C, \quad x \in R;$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin + C, \quad x \in (-1, 1).$

Przykłady 9.2.

Twierdzenie 1.6. (wzór na całkowanie przez części)

Zakładamy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne. Wówczas

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Przykłady 9.3.

Twierdzenie 1.7. (całkowanie przez podstawienie)

Zakładamy, że funkcja $f : I \to R$ jest ciągła na przedziale I, funkcja $\varphi : J \to I$ ma ciągłą pochodną na przedziale J. Niech $x = \varphi(t)$. Wówczas

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

Przykłady 9.4.

2. Całkowanie niektórych klas funkcji.

2.1. Całkowanie funkcji wymiernych.

Definicja 2.1. (funkcji wymiernej właściwej)

Funkcję wymierną $W(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazywamy *właściwą*, jeżeli $n < m$.

Fakt 2.2.

Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można zapisać w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Przykład 9.5.

$\frac{x^2+x+1}{x^2} = 1 + \frac{x+1}{x^2}$.

Definicja 2.3. (ułamków prostych)

Funkcję wymierną właściwą postaci

$$\frac{A}{(x+a)^n},$$

gdzie $n \in N$, $A, a \in R$ nazywamy *ułamkiem prostym I-go rodzaju.*

Funkcję wymierną właściwą postaci

$$\frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^n},$$

gdzie $n \in N$, $p, q, B, C \in R$, przy czym $\Delta = p^2 - 4q < 0$ nazywamy *ułamkiem prostym II-go rodzaju.*

Fakt 2.4. (rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste)

Każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych. Funkcja wymierna właściwa postaci

$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}...(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$$

jest sumą $k_1+k_2+...+k_r$ ułamków prostych I-go rodzaju oraz $l_1+l_2+...+l_s$ ułamków prostych II-go rodzaju, przy czym

- czynnikowi $(x-x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych I-go rodzaju postaci

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i}+\frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2}+...+\frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}}, \quad 1 \le i \le r;$$

- czynnikowi $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych II-go rodzaju postaci

$$\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+...+\frac{B_{jl_j}x+C_{jl_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}, \quad 1 \le j \le s,$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ik_i}, B_{j1}, B_{j2}, ..., B_{jl_j}, C_{j1}, C_{j2}, ..., C_{jl_j} \in R.$

Przykład 9.6.

$$\frac{x+1}{x^3(x-5)^2(x-1)(x^2+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-5}+\frac{E}{(x-5)^2}+\frac{F}{x-1}+\frac{ax+b}{x^2+4}+\frac{cx+d}{(x^2+4)^2}$$

W celu znalezienia współczynników $A, B, CD, E, F, a, b, c, d$ należy pomnożyć powyższą równość przez mianownik $x^3(x-5)^2(x-1)(x^2+4)^2$. Otrzymamy równość dwóch wielomianów. Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x po obu stronach tej równości, dostaniemy układ warunków, z którego wyznaczymy szukane współczynniki.

Algorytm całkowania funkcji wymiernych.

(Krok 1.) Funkcję wymierną niewłaściwą zapisujemy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

(Krok 2.) Mianownik funkcji wymiernej właściwej rozkładamy na czynniki liniowe $x - x_i$ oraz kwadratowe $x^2 + px + q$, gdzie $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

(Krok 3.) Rozkładamy funkcję wymierną właściwą na ułamki proste.

(Krok 4.) Obliczamy całki z ułamków prostych korzystając m.in. z poniższych wzorów:

(1.1) $\int \frac{A}{x+a}\,dx = A\ln|x+a| + C,$

(1.2) $\int \frac{A}{(x+a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C, \quad n \geq 2,$

(1.3) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx, \quad a > 0, n \geq 2.$

(1.4) $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$

Całkę

$$\int \frac{2x+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

obliczamy przez podstwienie

$$x^2 + px + q = t.$$

Całkę

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

obliczamy przez sprowadzenie trójmianu kwadratowego x^2+px+q do postaci kanonicznej

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

a następnie stosujemy podstawienie

$$t = x + \frac{p}{2}$$

i wykorzystujemy wzór rekurencyjny (1.3).

Przykłady 9.7.

2.2. Wybrane całki z funkcji trygonometrycznych.

(2.1) $\int \sin(ax)\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$,

(2.2) $\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$,

(2.3) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$,

(2.4) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$,

(2.5) $\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\, dx, \quad n \in N$,

(2.6) $\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx, \quad n \in N$,

(2.7) $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx, \quad n > 2$,

(2.8) $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx = -\frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\, dx, \quad n > 2$.

Całki postaci

$$\int \sin ax \cos bx\, dx, \quad \int \sin ax \sin bx\, dx, \quad \int \cos ax \cos bx\, dx,$$

obliczamy stosując tożsamości trygonometryczne

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$
$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$
$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

Całkę postaci

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)\, dx,$$

gdzie R dowolna funkcja, można obliczyć stosując podstawienie

$$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Wtedy

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2}.$$

Całkę postaci

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)\, dx,$$

gdzie R dowolna funkcja, można obliczyć stosując podstawienie

$$u = \operatorname{tg} x.$$

Wtedy

$$dx = \frac{du}{1+u^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{u}{1+u^2}.$$

Przykłady 9.8.

2.3. Wybrane całki z funkcji z niewymiernościami.

(3.1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C, \quad k \in R;$

(3.2) $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{k} + C, \quad k > 0;$

(3.3) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C,$

(3.4) $\int \sqrt{k^2-x^2}\,dx = \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{x}{k} + \frac{x}{2}\sqrt{k^2-x^2} + C, \quad k > 0;$

(3.5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{k^2-x^2}}\,dx = \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{x}{k} - \frac{x}{2}\sqrt{k^2-x^2} + C, \quad k > 0;$

(3.6) $\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + +C, \quad k \in R;$

(3.7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} - \frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + +C, \quad k \in R.$

Przykłady stosowanych podstawień przy obliczaniu całek z funkcji z niewymiernościami:

(3.8) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$ podstawienie : $t = \frac{1}{x-\alpha};$

(3.9) $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{px^2+q}}\,dx,$ podstawienie : $\sqrt{px^2+q} = tx;$

(3.10) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$ podstawienia Eulera:

(1) $a > 0 \;\Rightarrow$ podstawiamy $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ lub $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x;$

(2) $c > 0 \;\Rightarrow$ podstawiamy $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}$ lub $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c};$

(3) $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ podstawiamy $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} := t(x-x_1)$

lub $\sqrt{ax^2+bx+c} := t(x-x_2),$

gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c.

(3.11) $\int x^m(b+ax^n)^p\,dx$, gdzie $m,n,p \in Q$,

(1) $p \in Z \quad \Rightarrow$ podstawiamy $x = t^r$, gdzie r wspólny mianownik ułamków m i n;

(2) $\frac{m+1}{n} \in Z \quad \Rightarrow$ podstawiamy $b + ax^n = t^s$, gdzie s mianownik ułamka p;

(3) $\frac{m+1}{n} + p \in Z \quad \Rightarrow$ podstawiamy $b+ax^{-n} = t^s$, gdzie s mianownik ułamka p.

Przykłady 9.9.

3. Całka oznaczona.

3.1. Definicja całki oznaczonej.

Niech f będzie funkcją określoną i ograniczoną w przedziale $[a, b]$.

Definicja 3.1.

Podziałem przedziału $[a, b]$ nazywamy zbiór punktów

$$p = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$$

takich, że

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Oznaczamy:

- $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$
- $|\Delta x_i| = x_i - x_{i-1}$ - długość przedziału Δx_i
- $\delta(p) = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i|$ - średnica podziału p
- $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ - punkt pośredni z przedziału Δx_i
- $S(p) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ |\Delta x_i| = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + ... + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$ - suma pośrednia Riemanna funkcji f odpowiadająca podziałowi p.

Weźmy teraz ciąg $\{p_k\}$ podziałów przedziału $[a, b]$. Ciągowi temu odpowiadają wtedy ciąg średnic $\delta_k = \delta(p_k)$ oraz ciąg sum pośrednich $S_k = S(p_k)$

Definicja 3.2.

Ciąg $\{p_k\}$ podziałów przedziału $[a, b]$ nazywamy *normalnym*, jeśli

$$\lim_{k \to \infty} \delta_k = 0.$$

Definicja 3.3.

Jeżeli dla każdego normalnego ciągu $\{p_k\}$ podziałów przedziału $[a, b]$ odpowiadający mu ciąg sum pośrednich $S_k = S(p_k)$ jest zbieżny zawsze do tej samej granicy niezależnie od doboru punktów pośrednich, to granicę tę nazywamy *całką oznaczoną (w sensie Riemanna)* funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

O funkcji f mówimy wtedy, że jest całkowalna w sensie Riemanna.

Twierdzenie 3.4.

Funkcja ciągła na przedziale $[a, b]$ jest na tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.

Twierdzenie 3.5.

Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a, b]$ i ma na tym przedziale skończoną ilość punktów nieciągłości I-go rodzaju, to f jest na tym przedziale całkowalna w sensie Riemanna.

3.2. Interpretacja geometryczna i fizyczna całki oznaczonej.

A. Interpretacja geometryczna.

Jeżeli $f(x) \geq 0$ dla $x \in [a, b]$, to $\int_a^b f(x)\,dx$ przedstawia pole figury D ograniczonej osią Ox, wykresem funkcji f oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, tj.

$$|D| = \int_a^b f(x)\,dx.$$

B. Interpretacja fizyczna.

- Droga przebyta w ruchu zmiennym.

  Niech punkt materialny porusza się po płaszczyźnie lub w przestrzeni ze zmienną prędkością $v(t) = |\vec{v}(t)|$. Wówczas droga przebyta przez ten punkt w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem

  $$L = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

- Praca wykonana przez zmienną siłę.

  Zakładamy, że równolegle do osi Ox działa zmienna siła $F(x) = |\vec{F}(x)|$. Wówczas praca wykonana przez tę siłę od punktu $x = a$ do punktu $x = b$ wyraża się wzorem

  $$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

3.3. Własności całki oznaczonej.

Twierdzenie 3.6. (wzór Newtona-Leibniza)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f na tym przedziale.

Przykład 9.10.

Twierdzenie 3.7. (o całkowaniu przez części)
Zakładamy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a, b]$. Wówczas

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx,$$

gdzie

$$[f(x) \cdot g(x)]_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a).$$

Przykład 9.11.

Twierdzenie 3.8. (o całkowaniu przez podstawienie)
Jeżeli spełnione są warunki

(i) $\varphi : [\alpha, \beta] \overset{na}{\to} [a, b]$ i $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$,

(ii) $\varphi(\alpha) = a$ i $\varphi(\beta) = b$,

(iii) $f \in C([a, b])$,

to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Przykład 9.12.

Twierdzenie 3.9.

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a,b]$, to funkcje $f+g$, $f-g$, $c\,f$, gdzie $c \in R$, $f \cdot g$ są całkowalne na $[a,b]$. Ponadto

(i) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$,

(ii) $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$,

(iii) $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

Przykład 9.13.

Twierdzenie 3.10.

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ i $c \in (a,b)$, to f jest całkowalna na $[a,c]$ i $[c,b]$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Twierdzenie 3.11.

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a,b]$ oraz dla każdego $x \in [a,b]$ spełniają nierówność

$$f(x) \le g(x),$$

to

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Twierdzenie 3.12. (o wartości średniej dla całek)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a).$$

Definicja 3.13.

Liczbę

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

nazywamy *wartością średnią* funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Fakt 3.14.

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- Jeśli funkcja f jest nieparzysta, to $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
- Jeśli funkcja f jest parzysta, to $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

3.4. Zastosowania całek oznaczonych.

3.4.1. Przykłady zastosowań całek oznaczonych w geometrii.

A. Obliczanie pól figur płaskich.

1. Zakładamy, że f jest funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[a, b]$.
Pole obszaru

$$D = \{(x, y) \in R^2 \; : \; a \leq x \leq b \;\wedge\; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

wyraża się wzorem

$$|D| = \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Zakładamy, że funkcje f i g są ciągłe na przedziale $[a, b]$ i spełniają nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in [a, b]$.
Pole obszaru

$$D = \{(x, y) \in R^2 \; : \; a \leq x \leq b \;\wedge\; f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

wyraża się wzorem

$$|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

3. Zakładamy, że funkcje $x = f(y)$ i $x = g(y)$ są ciągłe na przedziale $[c, d]$ i spełniają nierówność $f(y) \leq g(y)$ dla $y \in [c, d]$.
Pole obszaru

$$D = \{(x, y) \in R^2 \; : \; f(y) \leq x \leq g(y) \;\wedge\; c \leq y \leq d\}$$

wyraża się wzorem

$$|D| = \int_a^b [g(y) - f(y)]\, dy.$$

4. Niech (φ, r) oznaczają współrzędne biegunowe punktu (x, y), tzn.

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Pole obszaru S ograniczonego krzywą zadaną równaniem we współrzędnych biegunowych $r = f(\varphi)$ oraz prostymi $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ wyraża się wzorem

$$|S| = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 \, d\varphi.$$

Przykład 9.14.

B. Obliczanie długości łuku krzywej.

1. Zakładamy, że funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$.

Długość łuku krzywej

$$\Gamma = \{(x, y) \in R^2 \, : \, a \leq x \leq b \, \wedge \, y = f(x)\}$$

wyraża się wzorem

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

2. Zakładamy, że funkcje $x = x(t)$ i $y = y(t)$ mają ciągłe pochodne na przedziale $[\alpha, \beta]$.

Długość łuku krzywej zadanej równaniami parametrycznymi

$$\Gamma = \{(x, y) \in R^2 \, : \, x = x(t), \, y = y(t), \, t \in [\alpha, \beta]\}.$$

wyraża się wzorem

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt.$$

Przykład 9.15.

C. Obliczanie objętości bryły obrotowej.

1. Zakładamy, że funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale $[a, b]$.

Objętość bryły obrotowej V powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0x$ dla $x \in [a, b]$ wyraża się wzorem

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

2. Zakładamy, że funkcja f jest ciągła i nieujemna na przedziale $[a, b]$ oraz $a \geq 0$.

Objętość bryły obrotowej V powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0y$ dla $x \in [a, b]$ wyraża się wzorem

$$|V| = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$

D. Obliczanie pola powierzchni bryły obrotowej.

1. Zakładamy, że funkcja f jest nieujemna i ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$.

Pole powierzchni Σ bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0x$ dla $x \in [a, b]$ wyraża się wzorem

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

2. Zakładamy, że funkcja f jest nieujemna i ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$ oraz $a \geq 0$.

Pole powierzchni Σ bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi $0y$ dla $x \in [a, b]$ wyraża się wzorem

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

Przykład 9.16.

3.4.2. Przykłady zastosowań całek oznaczonych w fizyce.

A. Obliczanie długości drogi w ruchu zmiennym.

Długość drogi przebytej przez punkt materialny poruszający się ze zmienną prędkością $v(t)$ w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt.$$

B. Obliczanie pracy wykonanej przez zmienną siłę.

Praca wykonana przez zmienną siłę $F(x)$ równoległą do osi Ox na odcinku od punktu $x = a$ do punktu $x = b$ wyraża się wzorem:

$$W = \int_{a}^{b} F(x)\, dx.$$

3.4.3. Przykłady zastosowań całek oznaczonych do obliczania wielkości mechanicznych.

A. Wyznaczanie momentów statycznych, momentów bezwładności i środka ciężkości figury płaskiej.

Zakładamy, że f jest funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[a, b]$. Oznaczamy

$$A = (a, f(a)),\ A' = (a, 0),\ B = (b, f(b)),\ B' = (b, 0).$$

Rozważamy figurę płaską $AA'B'B$ ograniczoną krzywą AB będącą wykresem funkcji $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$, odcinkiem $A'B'$ osi Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, tj.

$$AA'B'B = \{(x, y) \in R^2 \,:\, a \le x \le b \ \wedge\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Załóżmy, że masa jest rozłożona na tej figurze równomiernie, tak że gęstość powierzchniowa ρ (tj. masa przypadająca na jednostkę pola) jest stała.

(1) Moment statyczny M_x figury $AA'B'B$ względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$M_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

(2) Moment statyczny M_y figury $AA'B'B$ względem osi $0y$ wyraża się wzorem:

$$M_y = \rho \int_a^b x f(x)\, dx.$$

(3) Współrzędne środka ciężkości (ξ, η) figury $AA'B'B$ wyrażają się wzorami:

$$\xi = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}.$$

(4) Moment bezwładności I_x figury $AA'B'B$ względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$I_x = \frac{1}{3}\rho \int_a^b [f(x)]^3\, dx.$$

B. Wyznaczanie momentów bezwładności i środka ciężkości bryły obrotowej.

Niech V będzie bryłą obrotową powstałą przez obrót figury płaskiej $AA'B'B$ wokół osi $0x$. Zakładamy, że gęstość przestrzenna σ (tj. masa przypadająca na jednostkę objętości) jest stała.

(1) Moment bezwładności I_x bryły V względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$I_x = \frac{1}{2}\pi\sigma \int_a^b [f(x)]^4\, dx.$$

(2) Środek ciężkości (ξ, η) bryły V leży na osi $0x$ i ma współrzędne :

$$\xi = \frac{\int_a^b x[f(x)]^2\, dx}{\int_a^b [f(x)]^2\, dx}, \qquad \eta = 0.$$

C. Wyznaczanie momentów statycznych, momentów bezwładności i środka ciężkości łuku krzywej.

Zakładamy, że funkcja f ma ciągłą pochodną i jest nieujemna na przedziale $[a, b]$.
Rozważamy łuk AB krzywej $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$, tj.

$$AB = \{(x, y) \in R^2 \, : \, a \leq x \leq b \ \wedge \ y = f(x)\}.$$

Zakładamy, że gęstość liniowa λ (tj. masa przypadająca na jednostkę długości) jest stała.

(1) Moment bezwładności I_x łuku krzywej AB względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$I_x = \lambda \int_a^b [f(x)]^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

(2) Środek ciężkości (ξ, η) łuku krzywej AB ma współrzędne :

$$\xi = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}, \qquad \eta = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}.$$

(3) Moment statyczny M_x łuku krzywej AB względem osi $0x$ wyraża się wzorem:

$$M_x = \lambda \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

4. Całka niewłaściwa.

Definicja 4.1.

Powiemy, że x_0 jest *osobliwością* funkcji f, jeśli $x_0 = \pm\infty$ albo x_0 jest skończone i $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Załóżmy, że x_0 jest osobliwością funkcji f i dla każdego $\beta \in [a, x_0)$ istnieje całka $\int_a^\beta f(x)\,dx$.

Definicja 4.2.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\beta\to x_0^-} \int_a^\beta f(x)\,dx,$$

to granicę tę nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji f w przedziale $[a, x_0]$ i oznaczamy

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx,$$

czyli

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx := \lim_{\beta\to x_0^-} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Podobnie definiujemy całkę niewłaściwą, jeśli dolna granica całkowania jest osobliwością funkcji f, tzn.

$$\int_{x_0}^b f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to x_0^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

Przykład 9.17.

Obliczymy: (a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, (b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

Uwaga.

Jeżeli całka niewłaściwa istnieje i jest skończona, tzn. istnieje granica właściwa występująca w definicji, to mówimy, że całka niewłaściwa funkcji f jest zbieżna na $[a, x_0]$ bądź $[x_0, b]$. Jeśli ta granica jest niewłaściwa ∞ albo $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna do ∞ albo $-\infty$ odpowiednio.

Definicja 4.3.

Niech funkcja f będzie określona na prostej $(-\infty, \infty)$. Definiujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,$$

gdzie a jest dowolną liczbą z R.

Przykład 9.18.

Obliczymy: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3x}\,dx$.