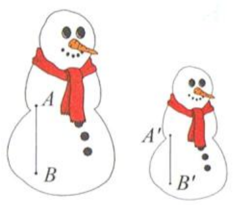
Przypomnienie

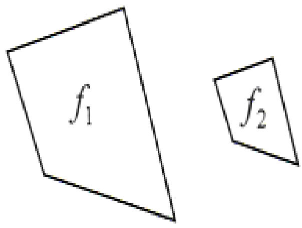
Jakie figury nazywamy podobnymi?

Używając języka potocznego możemy powiedzieć, że **dwie figury są podobne**, gdy mają taki sam kształt. Jedną można otrzymać z drugiej przez odpowiednie przesunięcia, obroty, symetrie i proporcjonalne powiększenie (pomniejszenie) w skali *k*, którą nazywamy skalą podobieństwa.

Przykłady:



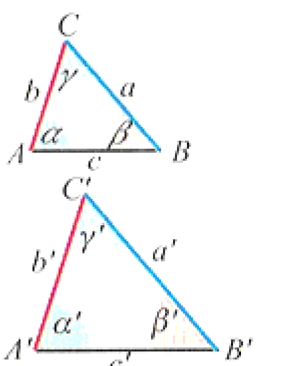
$|A'B'| = k \cdot |AB|$



2. **Związki między długościami, polami i skalą podobieństwa figur podobnych.**

Stosunek obwodów figur podobnych w skali *k*, jest równy *k*.
Stosunek pól figur podobnych w skali *k*, jest równy k^2.

3. Cechy podobieństwa trójkątów



$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

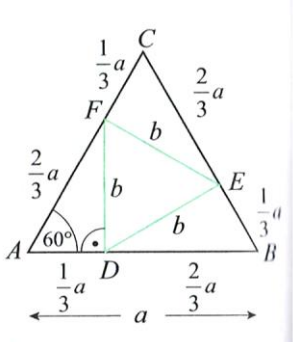
BBB. Jeśli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do trzech boków drugiego trójkąta, to te dwa trójkąty są podobne.

BKB. Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to te dwa trójkąty są podobne.

KKK. Jeśli kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe kątom drugiego trójkąta, to te dwa trójkąty są podobne.

Jak możemy wykorzystać własności podobieństw w konkretnych przykładach (z uwzględnieniem nie raz nieco innej strategii rozwiązywania zadań zamkniętych i otwartych).?

Przykład 1.
Przyjmując oznaczenia jak na rysunku obok, wyznacz skalę podobieństwa trójkątów ABC i DEF.



Rozwiązanie:

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADF obliczamy długość b boku DF:

$$\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + b^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2$$

$$\frac{1}{9}a^2 + b^2 = \frac{4}{9}a^2$$

$$b^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{9}a^2$$

$$b^2 = \frac{3}{9}a^2$$

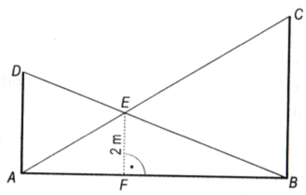
$$b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Skala podobieństwa trójkątów ABC i DEF jest równa

$$k = \frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Odpowiedź: Skala podobieństwa trójkątów ABC i DEF jest równa $\sqrt{3}$.

Przykład 2.



Murarz pracuje w wykopie (rys. obok) o szerokości $|AB| = 8$ m. Drabiny AC i BD, oparte o przeciwległe ściany, krzyżują się na wysokości 2 m, tzn. $|EF| = 2$ m. Drabina AC ma 10 m. **Jaka jest długość drabiny BD?**

Rozwiązanie:
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ABC mamy:

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$,czyli

$$8^2 + |BC|^2 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad 64 + |BC|^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad |BC|^2 = 100 - 64 \quad \Rightarrow \quad |BC|^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad |BC| = 6$$

Trójkąty ABC i AFE są do siebie podobne (cecha podobieństwa trójkątów KKK :

miara kąta *CAB* równa jest mierze kąta *EAF*, bo jest to kąt wspólny dla obu trójkątów; kąty *ABC* i *AFE* są kątami prostymi, więc miary ich są równe; zatem pozostałe kąty w obu trójkątach muszą mieć też równe miary).
Zatem odpowiednie boki tych trójkątów są proporcjonalne (cecha BBB) – w szczególności: $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AF|}{|EF|}$, czyli $\frac{8}{6} = \frac{|AF|}{2} \quad \Rightarrow \quad |AF| = \frac{8 \cdot 2}{6} = \frac{8}{3}$.

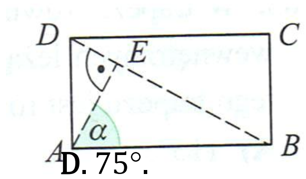
Ponieważ odległość $|AB|$ jest sumą odległości $|AF|$ i $|FB|$ ($|AB| = |AF| + |FB|$), to $8 = \frac{8}{3} + |FB|$. Stąd $|FB| = 8 - \frac{8}{3} = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.

Trójkąty *ABD* i *FBE* są podobne (znowu cecha podobieństwa trójkątów KKK) i analogicznie jak poprzednio stwierdzamy, że: $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|FB|}{|EF|}$, czyli $\frac{8}{|AD|} = \frac{\frac{16}{3}}{2}$.

Wyliczamy: $|AD| = \frac{8 \cdot 2}{\frac{16}{3}} = 16 : \frac{16}{3} = 16 \cdot \frac{3}{16} = 3$ i z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ABD*: $|BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 = 3^2 + 8^2 = 9 + 64 = 73$. Ostatecznie: $|BD| = \sqrt{73}$.

Odpowiedź: Drabina *BD* ma długość $\sqrt{73}$ m.

Przykład 3.
W prostokącie *ABCD* przekątna *BD* jest dwa razy dłuższa niż bok *AD* (rysunek obok). **Miara kąta α jest równa:**



A. 30°, **B.** 45°, **C.** 60°, **D.** 75°.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że trójkąty *DAB* i *AEB* są podobne (cecha KKK), bo kąt *ABD* i kąt *EBA* jest kątem wspólnym w obu trójkątach a kąty *DAB* i *AEB* są kątami prostymi. Miara kąta α jest zatem równa mierze kąta *ADB.* Korzystamy z funkcji trygonometrycznych dla trójkąta prostokątnego *DAB* oraz informacji w treści zadanie, że $|BD| = 2|AD|$:

$$\cos \angle ADB = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AD|}{2|AD|} = \frac{1}{2};$$

czyli kąt *ADB*, a więc również kąt α ma miarę 60°.

Prawidłowa odpowiedź to **C.**

Przykład 4.

Przekątna kwadratu K ma długość $2\sqrt{2}$, a obwód kwadratu M ma długość $16\sqrt{2}$. Skala podobieństwa kwadratu M do kwadratu K jest równa:

A. $\sqrt{2}$, **B.** $2\sqrt{2}$, **C.** 4, **D.** $4\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Wszystkie kwadraty są podobne (np. koła i okręgi – również).
<u>Obliczamy długość boku *a*</u> kwadratu K:

z twierdzenia Pitagorasa $a^2 + a^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$, zatem $2a^2 = 8 \quad / : 2$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

Następnie **obliczamy długość boku *b*** kwadratu M: kwadrat ma wszystkie boki równe, więc jego obwód obliczamy jako 4 razy długość boku

$$4b = 16\sqrt{2} \quad / : 4$$

$$b = 4\sqrt{2}$$

Skala podobieństwa kwadratu M do kwadratu K jest równa $\frac{b}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Odpowiedź **B.**

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA

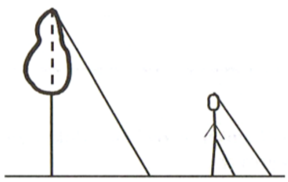
Zadanie 1. (1 pkt)

Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ dzielą się w punkcie S w stosunku 5:2 $\left(|AS|:|SC|=5:2=|BS|:|SD|\right)$. Nieprawdą jest, że:

A. stosunek pola trójkąta ABS do pola trójkąta CDS wynosi 5:2,
B. stosunek długości podstaw $|AB|:|CD|=5:2$,
C. stosunek pola trójkąta CDS do pola trójkąta ABS wynosi 4:25,
D. stosunek obwodu trójkąta ABS do obwodu trójkąta CDS wynosi 5:2, .

Zadanie 2. (1 pkt)

Drzewo rzuca cień długości 12 m. Jednocześnie cień chłopca wzrostu 154 cm ma długość 132 cm (rysunek obok). Wysokość drzewa wynosi:



A. ok.10,3 m, **B**. 14 m, **C**. ok.15,4 m, **D**. 22 m.

Zadanie 3. (1 pkt)

Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne. Odpowiednim wierzchołkiem do A jest wierzchołek A', do B wierzchołek B', $|AB|=4$ cm, $|BC|=5$ cm, $|AC|=6$ cm, $|A'B'|=10$ cm.

Zatem:

A. $-\sqrt{5}$, **B**. $\sqrt{2}$, **C**. $\sqrt{7}$, **D**. $\sqrt{10}$.

Zadanie 4. (2 pkt)

Długości boków trójkąta ABC są odpowiednio równe 3,5 cm, 5,2 cm, 7 cm. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ do niego podobnego ma długość 62,8 cm. Oblicz długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$.