Algebra liniowa I. Lista 5

Zadanie 1. Wykazać, że odwzorowanie $\sigma\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3$ dane wzorem: $\sigma(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_2 + 2 \cdot x_3)$, gdzie $x = (x_1, x_2, x_3)$ oraz $+$, $\cdot$ oznaczają operacje dodawania i mnożenie w $\mathbb{Z}_3$, jest permutacją zbioru $\mathbb{Z}_3^3$. Czy potrafisz wskazać sposób na możliwie oszczędne zapisanie tej permutacji? Jaki jest znak tej permutacji?

Zadanie 2. Sprawdź, czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne:

1. $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 1, 1)$ jako elementy $\mathbb{R}^3$, a także jako elementy $\mathbb{Z}_3^3$;
2. $\{(x, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \colon x = a, b, c\}$, gdzie a, b, c są dowolnymi, różnymi między sobą i różnymi od zera liczbami;
3. nieskończony układ wielomianów $(x - 1), (x - 1)(x - 2), (x - 1)(x - 2)(x - 3), \ldots, (x - 1)(x - 2) \cdots (x - n), \ldots$ w $\mathbb{P}(\mathbb{R})$;
4. nieskończony układ funkcji trygonometrycznych: $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos(nx), \ldots$ w przestrzeni funkcji rzeczywistych;
5. 1, $\sqrt{2}$ jako elementy ciała $\mathbb{R}$ rozumianego jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{Q}$.

Zadanie 3. Wykaż, że następujące układy są bazami:

1. $(0, 1)$, $(1, 1)$ w $\mathbb{R}^2$;
2. $(1, 0, \ldots, 0), (1, 1, 0, \ldots, 0), (1, 1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (1, 1, \ldots, 1)$ w $\mathbb{R}^n$.

Które z układów rozpatrywanych w poprzednim zadaniu są bazami?

Zadanie 4. Do następujących układów wektorów dołóż dodatkowe tak, by otrzymać bazę:

1. $(1, 2, 2), (0, -1, 0)$ w $\mathbb{R}^3$;
2. $(1, 2, 2), (0, 2, 2)$ w $\mathbb{Z}_3^3$;
3. $x^2, x^4, x^6, \ldots, x^{2n}, \ldots$ w $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.

Zadanie 5. Wykazać, że zbiór $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Wyznacz jakąkolwiek bazę przestrzeni W. Określ jej wymiar.

Zadanie 6. Sprawdź, że układ $(1,1,2,2)$, $(2,2,1,1)$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^4$. Sprawdź, że układ $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,1,1)$ stanowi bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Za pomocą wektorów tej bazy uzupełnij wskazany układ do bazy.

Zadanie 7. Załóżmy, że przestrzeń liniowa V ma wymiar n. Niech $M = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ będzie podzbiorem przestrzeni V o tej własności, że $\operatorname{lin} M = V$. Wykazać, że zbiór M stanowi bazę przestrzeni V.

Zadanie 8. Wykazać, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są różnymi liczbami rzeczywistymi, to funkcje $f_0 = 1, f_1 = x - a_1, f_2 = (x - a_1)(x - a_2), \ldots, f_n = (x - a_1)\cdots(x - a_n)$ są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$). Wykazać, że każdy wielomian stopnia n o współczynnikach rzeczywistych może zostać przedstawiony jako kombinacja liniowa funkcji $f_0, f_1, \ldots, f_n$

Zadanie 9. Dano ściśle rosnący ciąg liczb $a = a_0, a_1, \ldots, a_m = b$. *Łamaną* o punktach załamania w zbiorze $\{a_i \colon i = 0, \ldots m\}$ nazywamy każdą taką funkcję $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, że jej ograniczenie do wszelkiego przedziału $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots m$ jest funkcją liniową. Wykazać, że zbiór V wszystkich takich łamanych jest przestrzenią liniową z dodawaniem funkcji jako operacją dodawania i mnożeniem funkcji przez liczbę jako operacją mnożenia przez skalar. Określmy ciąg funkcji f_k, $k = 0, \ldots, m$ w ten sposób, że f_k to łamana przyjmująca wartość 1 w a_k i 0 w pozostałych a_i. Wykazać, że ciąg ten stanowi bazę przestrzeni V.

Zadanie 10. Czy zbiór liczb rzeczywistych jako przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{Q}$ jest skończonego wymiaru?