

Algebra liniowa I. Lista 6

Zadanie 1. Wyznacz kombinację liniową $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 3\mathbf{x}_3$ wektorów: $\mathbf{x}_1 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (-2, -1, -3, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 1, 1, -1)$.

Zadanie 2. Wyznacz wektor \mathbf{x} z równania $2\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 + 2\mathbf{y}_3 + 2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ jeśli $\mathbf{y}_1 = (-1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{y}_2 = (-2, 0, -3, 0)$, $\mathbf{y}_3 = (5, 0, 2, -1)$.

Zadanie 3. Załóżmy, że wektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ są liniowo niezależne. Czy liniowo niezależne są wektory

1.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= 3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_2 &= 2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_3 &= 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3;\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 &= 3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{c}_2 &= 2\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4 \\ \mathbf{c}_3 &= 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4;\end{aligned}$$

Zadanie 4. Układ wektorów $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ jest liniowo niezależny. Czy następujące układy są liniowo niezależne:

1. $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{b}_i = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k;$
2. $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i-1}, \dots, \mathbf{c}_k = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{k-1}?$

Zadanie 5. Bazę układu wektorów $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ nazwiemy każdy maksymalny liniowo niezależny podukład $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_s}$ tego układu. Znajdź wszystkie bazy następujących układów:

1. $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 0), \mathbf{a}_2 = (1, 2, 3, 2), \mathbf{a}_3 = (5, 10, 0, 0);$
2. $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{a}_2 = (2, 3, 4, 5), \mathbf{a}_3 = (3, 4, 5, 6), \mathbf{a}_4 = (4, 5, 6, 7).$