Algebra liniowa I. Lista 7

Zadanie 1. Niech $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie określone wzorem: $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, x_1 - x_2)$. Sprawdź, że T jest liniowe. Wyznacz jego macierz A_T. Wyznacz T^2 oraz A_{T^2}. Oblicz iloczyn $A_T A_T$. Oblicz $\ker T$.

Zadanie 2. Które z następujących odwzorowań jest liniowe? Jeśli jest, to wyznacz jego macierz, jądro i obraz.

1. $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_3 + x_1)$;
2. $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1 + 1)$;
3. $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$;

Zadanie 3. Niech $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie liniowe. Wiemy, że $T(1, 2, 3) = (1, 0, 0)$, $T(0, 1, 1) = (0, 0, 2)$ oraz $T(-1, -1, -1) = (0, 5, 0)$. Czy potrafisz wyznaczyć $T(3, 1, 1)$? Wyznacz macierz A_T odwzorowania T.

Zadanie 4. Załóżmy, że $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ i załóżmy, że $T(1, 2, 1) = (1, 1, 1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (9, 0, 0, 0)$ oraz $T(1, 1, 1) = (2, 0, 2, 0)$. Czy T może być liniowe?

Zadanie 5. Określmy odwzorowanie $T : \mathsf{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}_3(\mathbb{R})$ wzorem

$$T(w(x)) = w(x - 2).$$

Uzasadnij, że T jest liniowe. Ponadto, $\boldsymbol{X} = (1, x, x^2, x^3)$ jest bazą uporządkowaną przestrzeni $\mathsf{P}_3(\mathbb{R})$. Wyznacz macierz odwzorowania T względem baz $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})$. Wykaż, że dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$, układ $\boldsymbol{X}_a = (1, x - a, (x - a)^2, (x - a)^3)$ jest bazą omawianej przestrzeni. Jak wygląda macierz odwzorowania T w bazach $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_2)$?