Algebra liniowa I. Lista 8

Zadanie 1. Niech $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ będzie dane wzorem $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_2 + 3x_3)$ zaś $S \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ będzie dane wzorem $S(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, 3x_1 + x_2)$. Znajdź złożenie ST. Czy odwzorowanie to jest odwracalne ? Jeśli nie, to wyznacz jego jądro i obraz.

Zadanie 2. Dla następujących odwzorowań rozstrzygnij czy są odwracalne; jeśli tak, to wyznacz odwzorowanie odwrotne, jeśli nie, to wyznacz jądro i obraz.

(1) $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dane wzorem $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$.

(2) $T \in L(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$, dane wzorem $T(w)(x) = w(x - 1) + w(x)$.

(3) $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ dane wzorem $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4 + x_1)$.

Ponadto, wyznacz macierze tych odwozrowań względem pary (baza standardowa, baza standardowa) w przypadkach (1), (3), a jeśli odwzorowanie jest odwracalne to także macierz odwzorowania odwrotnego.

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdej pary macierzy $A \in \mathsf{M}_{m\times n}, B \in \mathsf{M}_{n\times p}$ zachodzi wzór $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$. Wywnioskuj stąd, że jeśli $A \in \mathsf{M}_{n\times n}$ jest odwracalna, to A^T też jest odwracalna.

Zadanie 4. Sprawdź odwracalność następujących macierzy:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 5. Jakie warunki muszą spełniać liczby $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ aby macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ była odwracalna?

Zadanie 6. Dla następujących baz wyznacz bazy dualne

(1) $(1,-1,0),(0,1,-1),(-1,0,1)$ w $\mathbb{R}^3$;

(2) $(1,2,3,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)$ w $\mathbb{R}^4$

Zadanie 7. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2), \qquad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^3(x+3).$$

Zadanie 8. Niech $V = \operatorname{lin}\{\mathrm{e}^x, x\,\mathrm{e}^x, \ldots, x^n\,\mathrm{e}^x\}$. Uzasadnić, że wymiar przestrzeni V jest równy $n+1$. Wykazać, że odwzorowanie D określone na V wzorem $D(f) = f'$ jest endomorfizmem przestrzeni liniowej V.

Zadanie 9. Wykazać, że wyznacznik $\det D$ odwzorowania D jest równy 1. (Wskazówka: Wyznacz macierz odwzorowania D względem bazy $\mathrm{e}^x, x\,\mathrm{e}^x, \ldots, x^n\,\mathrm{e}^x$.)

Zadanie 10. Dano macierz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, że macierz do niej odwrotna ma postać

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wyznaczniki tak A jak i A^{-1}.

Zadanie 11. Wykazać, że równanie

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = 0$$

ma jedynie dwa rozwiązania: -1, 3.

Zadanie 12.

Wykazać, że dla wszelkich liczb $a_1, \ldots, a_{n+1}$ zachodzi tożsamość

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i).$$

Wyznacznik po lewej stronie nosi nazwę wyznacznika Vandermonde'a.