Zadania z algebry 1

1. Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem liczbowym i niech m będzie dowolną liczbą dodatnią. Udowodnić, że zbiór $\mathbb{F}[\sqrt{m}] := \{u + v\sqrt{m} : u, v \in \mathbb{F}\}$ jest ciałem liczbowym.

2*. Niech a będzie liczbą algebraiczną stopnia n. Udowodnić, że zbiór

$$\mathbb{Q}[a] := \{p_0 + p_1 a + p_2 a^2 + \cdots + p_{n-1} a^{n-1} : p_0, \ldots p_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$$

jest ciałem.

3*. Dla liczb dodatnich a, b określmy ich *sumę hiperboliczną*

$$a \oplus b = \frac{ab}{a+b}.$$

Niech x i y oznaczają zmienne. Określmy rekurencyjnie działania Kirchhoffa na zmiennych x i y:

1. przyporządkowanie parze x, y ustalonej liczby dodatniej jest działaniem Kirchhoffa;
2. $x + y$ i $x \oplus y$ są działaniami Kirchhoffa;
3. jeśli $k(x, y)$, $m(x, y)$ i $n(x, y)$ są działaniami Kirchhoffa, to $k(m(x, y), n(x, y))$ jest także działaniem Kirchhoffa.

Czy istnieje takie działanie Kirchhoffa $l(x, y)$, że dla każdej pary liczb dodatnich a, b mamy $l(a, b) = ab$?

4. Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem. Niech

$$\mathscr{L} = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{F} : |\{k \in \mathbb{Z} : f(k) \neq 0 \text{ i } k \leq 0\}| < \infty\}.$$

Określmy w $\mathscr{L}$ operacje dodawania $+$ i mnożenia $*$ wzorami:

$$(f + g)(k) = f(k) + g(k), \qquad (f * g)(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(k - l) g(l).$$

Udowodnić, że działanie $*$ jest poprawnie określone oraz że zbiór $\mathscr{L}$ wraz z tymi działaniami jest ciałem.

5. Udowodnić, że w zbiorze dziewięcioelementowym można określić dodawanie i mnożenie w ten sposób, by otrzymana struktura była ciałem. (Wskazówka: Naśladuj konstrukcję liczb zespolonych: dołącz do $\mathbb{Z}_3$ element x o tej własności, że $x \odot x = 2$.)

6. Udowodnić, że jeśli ciało $\mathbb{F}$ ma skończenie wiele elementów, to musi istnieć liczba pierwsza p oraz liczba naturalna n, że $|\mathbb{F}| = p^n$.

7. Bez posługiwania się małym twierdzeniem Fermata udowodnić, że każdy element $x \neq 0$ w $\mathbb{Z}_p$ jest odwracalny.

8. Udowodnić, że jeśli φ i ξ są automorfizmami ciała $\mathbb{F}$, to odwzorowanie odwrotne φ^{-1} a także złożenie $\varphi \circ \xi$ są także automorfizmami tego ciała.