EGZAMIN Z ALGEBRY LINIOWEJ II

Imię i nazwisko. . . . ., *Grupa*. . . . . .

Zadanie 1. Niech $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Niech $\mathbf{f}_1 = (1,2)$, $\mathbf{f}_2 = (2,3)$, $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ w bazach $(\mathbf{e}, \mathbf{e})$

(1) Macierz B odwzorowania T w bazach $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ ma wyraz b_{22} równy 3.

(2) Macierz C odwzorowania T w bazach $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ jest jednostkowa.

(4) Macierz D odwzorowania T w bazach $(\mathbf{f}, \mathbf{e})$ ma wyraz d_{22} równy 5.

Zadanie 2.

(1) Wektory $\mathbf{f}_1 = (1,2)$, $\mathbf{f}_2 = (0,2)$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$, a elementy przestrzeni dualnej $(\mathbb{R}^2)^*$, $\mathbf{f}^1 = [1,0]$, $\mathbf{f}^2 = [-1, 1/2]$ tworzą do tej bazy bazę dualną.

(2) Jeśli $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dane jest wzorem $T(x,y) = (x-y, x)$, to $T^* \in \mathrm{End}((\mathbb{R}^2)^*)$ dane jest wzorem $T^*[x,y] = [y, y-x]$

(4) Jeśli $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dane jest wzorem $T(x,y) = (x,x)$, to $\dim \operatorname{im} T^* = 1$.

Zadanie 3.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(4) Jeśli A i B są dwiema macierzami rzeczywistymi $n \times n$ o wszystkich wyrazach dodatnich i ich wyznaczniki są różne od zera, to wyznacznik ich sumy $A + B$ jest także różny od zera.

Zadanie 4.

(1) Niech $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 20 & 3 \end{bmatrix}$. Wówczas $\det(A^9) = 1000000000$.

(2) Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, to $\det(AB) = 5 \cdot 6 \cdot 5 = 150$.

(4) Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, to $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.

(1) Istnieje $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ oraz repery $\mathbf{e}, \mathbf{f}$, że $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ jest macierzą odwzorowania T w bazach $(\mathbf{e}, \mathbf{e})$ zaś $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ – w bazach $(\mathbf{f}, \mathbf{f})$.

(2) Niech $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ będzie dane wzorem $T(x, y) = (x + 2y, 3y)$. Wtedy $\det T = 1$.

(4) Jeśli macierz $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest odwracalna i ma współczynniki całkowite, to macierz A^{-1} ma także współczynniki całkowite.

Zadanie 6.

(1) Dla dowolnego ciała $\mathbb{K}$ i dowolnych jego elementów $a_1, \ldots, a_n$, b, jeśli $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = b^2$, to równanie $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie.

(2) Każdy układ równań liniowych $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$, $i = 1, \ldots m$, ma przynajmniej jedno rozwiązanie, o ile liczba równań m jest mniejsza niż liczba niewiadomych n i skalary b_i są między sobą różne.

(4) Jeśli macierz A jest kwadratowa oraz górnie trójkątna i ponadto wszystkie wyrazy a_{ii} na przekątnej macierzy A są niezerowe, to układ równań $Ax = b$, zapisany macierzowo, ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 7.

(1) Równanie niejednorodne $Ax = b$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy równanie jednorodne $Ax = 0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie niezerowe.

(2) Układ równań $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 3x_4 & = & -3 \end{array} \right.$ nie ma rozwiązań nad ciałem $\mathbb{Q}$.

(4) Fundamentalny układu rozwiązań układu jednorodnego $Ax = 0$, zapisanego macierzowo, nie może liczyć więcej elementów niż układ równań ma niewiadomych.

Zadanie 8.

(1) Wiemy, że wektory $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$ oraz $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, 0)$ stanowią fundamentalny układ rozwiązań równania $Ax = 0$ oraz, że $(1, 1, 2, 1)$ jest rozwiązaniem równania $Ax = b$. W takim razie $(3, 2, 1, 0)$ jest także rozwiązaniem równania $Ax = b$.

(2) Jeśli macierz $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ma niezerowy wyznacznik, to równanie $Ax = b$ ma zawsze rozwiązanie.

(4) Układ wektorów $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 1)$, jest fundamentalnym układem rozwiązań równania $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Zadanie 9.

(1) Liczby -1 oraz 1 są wartościami własnymi macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(2) Macierz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nie ma wartości własnych jako element $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(4) $(-\frac{1}{3}, 1)$ jest wektorem własnym macierzy $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, odpowiadającym wartości własnej -2.

Zadanie 10.

(1) Niech $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 = 0\}$ zaś $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \,\mathrm{i}\, x_3 = 0\}$. Wtedy $U + V < \mathbb{R}^3$ jest sumą prostą podprzestrzeni U i V.

(2) Niech $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 = 0\}$, $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_3 = 0\}$. Wtedy $U + V < \mathbb{R}^3$ jest sumą prostą podprzestrzeni U i V.

(4) Niech $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ i $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Wtedy $U + V = \mathbb{R}^3$.

Zadanie 11.

(1) Odwzorowanie liniowe $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które na bazie standardowej $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ przyjmuje wartości $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $T\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $T\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2$ jest nilpotentne.

(2) Odwzorowanie liniowe $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które na bazie standardowej $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ przyjmuje wartości $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $T\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $T\mathbf{e}_3 = 0$ jest nilpotentne.

(4) Odwzorowanie $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, którego macierz w pewnych bazach $(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ ma postać $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest nilpotentne.

Zadanie 12.

(1) Wiadomo, że U, V są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej skończonego wymiaru W. Wtedy $\dim W \geqslant \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

(2) Istnieje odwzorowanie liniowe $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, które ma wartość własną, ale nie ma podprzestrzeni niezmienniczych za wyjątkiem $\{0\}$ i $\mathbb{R}^5$.

(4) Macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ jest klatką Jordana.

Zadanie 13.

(1) Macierze $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ są podobne.

(2) Macierze $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ są podobne.

(4) Jeśli dwie macierze są podobne, to mają ten sam wielomian charakterystyczny.

Zadanie 14.

(1) Wektory $(1, -1, -2)$ i $(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ są prostopadłe.

(2) Jeśli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{100}$ oraz $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1$, to $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| = 1$.

(4) Istnieją wektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{100}$, że $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 10$, $|\mathbf{x}| = 1,5$ i $|\mathbf{y}| = 4$.

Zadanie 15.

(1) Jeśli wiadomo, że wektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ są wzajemnie prostopadłe i wszystkie mają długość 2, to $|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_m|^2 = 4m$.

(2) W $\mathbb{R}^{2007}$ można wyznaczyć 2008 niezerowych i wzajemnie prostopadłych wektorów.

(4) Niech $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ oraz $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_4$ – dwie różne bazy ortonormalne w $\mathbb{R}^4$. Istnieje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, że $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_4 \rangle^2 \neq \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_1 \rangle^2 + \cdots + \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_4 \rangle^2$.

Zadanie 16.

(1) Niech $L < \mathbb{R}^4$, $L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$. Wektor $(-1, -1, 1, -2) \in L^\perp$.

(2) Odwzorowanie $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$ dane wzorem $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = x_1y_1 + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_4y_4$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^4$.

(4) Odwzorowanie $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$ dane wzorem $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 17.

(1) Istnieje odwzorowanie ortogonalne $U \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $U\mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

(2) Odwzorowanie $U \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, którego macierz w bazie standardowej ma postać $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ jest ortogonalne.

(4) Jeśli U jest odwzorowaniem ortogonalnym, to pierwiastki jego wielomianu charakterystycznego są liczbami zespolonymi o module 1.

Zadanie 18.

(1) Niech f_1, f_2, f_3 będą funkcjonałami na $\mathbb{R}^2$ określonymi następująco: $f_i(x_1, x_2) = ix_i$, dla $i = 1, 2$, oraz $f_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Wtedy $f_1 \otimes f_2 \otimes f_3(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 4$.

(2) Jeśli forma dwuliniowa G na $\mathbb{R}^2$ ma postać $G(x, y) = x_1y_2 + x_2y_2$, to $G_+(x, y) = \dfrac{x_1y_2 + y_1x_2}{2} + x_2y_2$.

(4) Jeśli G jest określona jak wyżej, to $G_-(x, x) = -1$, gdy $x = (-1, 0)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

A