Zasada włączania-wyłączania dla wymiarów

Twierdzenie 1 (numeracja z wykładu: 66) *Niech U, W będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowej skończonego wymiaru V. Wtedy*

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Dowód. Niech $b_1, \ldots, b_s$ – baza przestrzeni $U \cap W$. (Jeśli $U \cap W = \{0\}$, to tej bazy po prostu nie ma, $s = 0$). Ponieważ $U \cap W$ jest podprzestrzenią przestrzeni U, a także W, więc bazę tę można uzupełnić do bazy przestrzeni U:

$$b_1, \ldots, b_s, b'_{s+1}, \ldots, b'_p$$

i także W:

$$b_1, \ldots, b_s, b''_{s+1}, \ldots, b''_q.$$

Przypuśćmy, że

$$x = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_s b_s, \quad y = \alpha'_{s+1} b'_{s+1} + \cdots \alpha'_p b'_p, \quad z = \alpha''_{s+1} b''_{s+1} + \cdots \alpha''_q b''_q$$

oraz

$$x + y + z = 0.$$

Wtedy $x + y \in U$. Z drugiej strony, $x + y = -z \in W$. Stąd $-z \in U \cap W$. Wobec tego, że układ $b_1, \ldots, b_s$ stanowi bazę przestrzeni $U \cap W$, istnieją skalary $\beta_1, \ldots, \beta_s$, że $-z = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_s b_s$. W takim razie,

$$0 = -z + z = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_s b_s + \alpha''_{s+1} b''_{s+1} + \cdots \alpha''_q b''_q.$$

Jednak wektory $b_1, \ldots, b_s, b''_{s+1}, \ldots, b''_q$ są liniowo niezależne (bo stanowią bazę przestrzeni W), więc wszystkie współczynniki β_i oraz, co ważniejsze, α''_j są zerami. Zastępując rolami z i y możemy się przekonać w taki sam sposób, że także wszystkie współczynniki α'_k są zerami. W rezultacie $y = z = 0$ i także $x = 0$. Stąd z kolei wynika, że wszystkie współczynniki α_l są zerami. W ten sposób wykazaliśmy, że układ

$$b_1, \ldots, b_s, b'_{s+1}, \ldots, b'_p, b''_{s+1}, \ldots, b''_q$$

jest liniowo niezależny. Każdy element przestrzeni $U + W$ daje się przedstawić w postaci kombinacji liniowej elementów tego układu. Jest on więc bazą przestrzeni $U + W$ Stąd $\dim(U + W) = p + q - s$. Ponieważ $\dim U = p$, $\dim W = q$ oraz $\dim U \cap W = s$, więc dowód jest zakończony. □

Uwaga 1 Dla trzech podprzestrzeni zasada włączania-wyłączania nie musi być prawdziwa. To znaczy, jeśli U, W, X są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to na ogół

$$\dim(U+W+X) \neq \dim(U)+\dim(W)+\dim(X)-\dim(U\cap W)-\dim(U\cap X)-\dim(W\cap X)+\dim(U\cap W\cap X).$$

Proszę wskazać odpowiedni przykład.

Macierze Jordana o wyrazach zespolonych

Definicja 1 *Klatką Jordana* o wartości λ i wymiarze $m \times m$ nazywamy macierz $J_m(\lambda) \in \mathsf{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ postaci

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Na przykład, macierz

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

jest klatką Jordana $J_3(\sqrt{3})$.

Definicja 2 *Macierzą Jordana* nazywamy każdą macierz postaci

$$\begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}, \tag{J}$$

gdzie wzdłuż przekątnej mamy bloki (klatki Jordana) o wymiarach $m_1 \times m_1, \dots, m_k \times m_k$ a wszystkie pozostałe wyrazy macierzy są zerami.

Na przykład,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jordana o trzech blokach: $J_2(2)$, $J_3(4)$ oraz $J_1(\sqrt{2})$. Zachodzi następujące

Twierdzenie 2 (Jordan) *Niech A oznacza dowolną macierz wymiaru $n \times n$ o wyrazach zespolonych. Wtedy istnieje macierz odwracalna $B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, że macierz $C = B^{-1}AB$ jest Jordana (ma postać (J)).*

Przypomnijmy, że macierz A zadaje endomorfizm liniowy $T = T_A$ przestrzeni $\mathbb{C}^n$ wzorem $T(x) = Ax$. Oczywiście, macierz A możemy wyrazić wzorem $A = BCB^{-1}$. Rozbijmy bazę standardową $e_1, e_2, \dots, e_n$ na bloki długości $m_1, m_2, \dots, m_k$; to znaczy,

$$e_1, \dots, e_{m_1};\ e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}; \dots; e_{m_{k-1}+1}, \dots, e_{m_k}.$$

Utwórzmy nową bazę:

$$b_1 = Be_1, \dots, b_{m_1} = Be_{m_1};\ b_{m_1+1} = Be_{m_1+1}, \dots, b_{m_2} = Be_{m_2};\ \dots;\ b_{m_{k-1}+1} = Be_{m_{k-1}+1}, \dots, b_{m_k} = Be_{m_k}.$$

Zauważmy, że na podstawie łączności mnożenia macierzy i własności macierzy C

$$\begin{aligned} T(b_1) &= ABe_1 = BCB^{-1}Be_1 = BCe_1 = B(\lambda_1 e_1) = \lambda_1 Be_1 = \lambda_1 b_1 \\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T(b_{m_1}) &= BCe_{m_1} = B(e_{m_1-1} + \lambda_1 e_{m_1}) = b_{m_1-1} + \lambda_1 b_{m_1}. \end{aligned}$$

Podobne zależności otrzymamy dla pozostałych bloków. Wskazują one na fakt, że macierz endomorfizmu T względem baz uporządkowanych $(b_i\colon i = 1, \ldots, n), (b_i\colon i = 1, \ldots n)$ jest równa macierzy Jordana C. Zarazem sugerują, że twierdzenie Jordana można udowodnić poprzez wykazanie, że dla każdego endomorfizmu przestrzeni skończonego wymiaru nad $\mathbb{C}$ istnieje jej baza uporządkowana $\mathbb{B}$, że macierz tego endomorfizm względem baz $\mathbb{B}, \mathbb{B}$ ma postać Jordana.

Twierdzenie o rozkładzie Jordana endomorfizmu przestrzeni liniowej skończonego wymiaru nad $\mathbb{C}$

Definicja 3 Niech $R \in \operatorname{End}(V)$. Podprzestrzeń W przestrzeni V nazywamy *podprzestrzenią niezmienniczą* odwzorowania R jeśli

$$R(w) \in W, \quad \text{dla każdego } w \in W; \quad \text{równoważnie:} \quad R(W) \subseteq W.$$

Jeśli W jest różna od przestrzeni $\{0\}$ i V, to powiemy, że jest nietrywialną podprzestrzenią niezmienniczą.

Niech

$$V_0 = \{v \in V\colon \bigvee_{k \in \mathbb{N}} R^k(v) = 0\}.$$

Zauważmy, że

$$\ker R \subseteq \ker R^2 \subseteq \ker R^3 \subseteq \ldots. \tag{1}$$

Rzeczywiście, jeśli $x \in \ker R^j$, gdzie $j \in \mathbb{N}$, to

$$R^{j+1}(x) = R(R^j(x)) = R(0) = 0.$$

W rezultacie $x \in \ker R^{j+1}$. Przypuśćmy, że $\dim V < \infty$. Wtedy ciąg (1) może zawierać jedynie skończenie wiele różnych wyrazów. (Różne podprzestrzenie stojące w tym ciągu mają też różne wymiary!) Wynika stąd, że istnieje liczba $k_0 \in \mathbb{N}$, że

$$V_0 = \ker R^{k_0}. \tag{2}$$

Lemat 3 *Niech k_0 oznacza liczbę określoną powyżej. Wtedy*

$$V = V_0 \oplus V_0',$$

gdzie $V_0' = \operatorname{im} R^{k_0}$. Obie podprzestrzenie są podprzestrzeniami niezmienniczymi odwzorowania R. Ponadto R ograniczone do V_0' jest bijekcją.

Dowód. Przypuśćmy, że $x \in V_0 \cap V_0'$. Wtedy, na mocy (2), $R^{k_0}(x) = 0$, a z definicji V_0' wynika istnienie takiego elementu y, że $x = R^{k_0}(y)$. W konsekwencji, $0 = R^{2k_0}(y)$ i $y \in V_0$. Odwołując się powtórnie do (2), otrzymujemy

$$0 = R^{k_0}(y) = x.$$

Stąd $V_0 \cap V_0' = \{0\}$ i w następstwie $\dim V_0 \cap V_0' = 0$. Stosując kolejno twierdzenia 66 i 39, dostaniemy

$$\dim(V_0 + V_0') = \dim V_0 + \dim V_0' = \dim \ker R^{k_0} + \dim \operatorname{im} R^{k_0} = \dim V.$$

W takim razie $V = V_0 \oplus V_0'$.

Niezmienniczość V_0 jest niemal oczywista:

$$x \in V_0 \Rightarrow 0 = R(R^{k_0}(x)) = R^{k_0}(R(x)) \Rightarrow R(x) \in V_0.$$

Jeśli $x \in V_0'$, to jest postaci $x = R^{k_0}(y)$. Wtedy $R(x)$ jest też takiej postaci, tzn. $R(x) = R^{k_0}(u)$, gdzie $u = R(y)$. W konsekwencji $R(x) \in V_0'$. W ten sposób dowiedliśmy, że także V_0' jest podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania R.

By przekonać się, że odwzorowanie $R|V_0'$ jest bijekcją, wystarczy teraz dowieść, że $\ker R|V_0' = \{0\}$. Niech więc $x \in V_0'$ i niech $R(x) = 0$. Wtedy $x \in V_0$. Wykazaliśmy jednak, że $V_0 \cap V_0' = \{0\}$, więc $x = 0$. □

Niech teraz V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{C}$ i niech $T \in \operatorname{End}(V)$. Niech zbiór wartości własnych $\sigma(T)$ odwzorowania T składa się z m elementów: $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots \lambda_m\}$. Określmy podprzestrzenie V_{λ_i}, $i = 1, \dots, m$, wzorem $V_{\lambda_i} = \{v \in V \colon \bigvee_{k \in \mathbb{N}} R^k(v) = 0\}$, gdzie $R = T - \lambda_i E$ i E oznacza odwzorowanie identycznościowe.

Twierdzenie 4 (o rozkładzie) *Jeśli V, $T \in \operatorname{End}(V)$ oraz V_{λ_i} są takie, jak określiliśmy powyżej, to*

(1) $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}$;

(2) każda podprzestrzeń V_{λ_i} jest podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania T.

Dowód. Jeśli $R = T - \lambda_1 E$, to $V_{\lambda_1} = V_0$, gdzie V_0 i V_0' są określone tak, jak w lemacie 3. Niech $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{\lambda_1\}$. Wykażemy najpierw, że $V_\lambda \subseteq V_0'$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Istnieją wówczas elementy $x \in V_\lambda$, $0 \neq u \in V_0$ oraz $v \in V_0'$, że $x = u + v$. Niech $S = T - \lambda E$. Z definicji przestrzeni V_λ wynika istnienie takiej liczby k, że $S^k(x) = 0$. Stąd

$$0 = S^k(x) = S^k(u) + S^k(v).$$

Ponieważ podprzestrzenie V_0 i V_0' są podprzestrzeniami niezmienniczymi odwzorowania R oraz

$$S = R + (\lambda_1 - \lambda)E,$$

więc także są podprzestrzeniami niezmienniczymi odwzorowania S. W rezultacie $S^k(u) \in V_0$ i $S^k(v) \in V_0'$ i na mocy lematu 3 wnosimy, że $S^k(u) = 0$. Rzecz jasna $S = R + \gamma E$, gdzie $\gamma = \lambda_1 - \lambda$. Stosując wzór dwumianowy Newtona do $(R + \gamma E)^k$ możemy się przekonać, że

$$0 = S^k(u) = Rw(R)(u) + \gamma^k u, \tag{3}$$

gdzie $w(R) = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \gamma^{k-j} R^{j-1}$. Ponieważ u jest niezerowym elementem podprzestrzeni V_0, więc istnieje minimalna liczba l, że $R^l(u) = 0$, nadto $l \geqslant 1$. Zastosujmy do równania (3) endomorfizm R^{l-1}. Stąd, że $Rw(R) = w(R)R$ otrzymamy

$$0 = w(R)R^l(u) + \gamma^k R^{l-1}(u) = \gamma^k R^{l-1}(u).$$

Jednak z definicji γ wynika, że liczba ta jest różna od zera. W takim razie $R^{l-1}(u) = 0$, co przeczy definicji liczby l. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $V_\lambda \subseteq V_0'$. Fakt ten w połączeniu z $V_{\lambda_1} \cap V_0' = \{0\}$ prowadzi do równości $\sigma(T|V_0') = \{\lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$. Rozumując indukcyjnie ze względu na m, możemy więc stwierdzić, że

$$V_0' = V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}$$

i w konsekwencji,

$$V = V_0 \oplus V_0' = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}.$$

Co się tyczy (2), to wcześniej stwierdziliśmy, że $V_{\lambda_1} = V_0$ jest podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania T. Z takich samych powodów podprzestrzeniami niezmienniczymi są pozostałe V_{λ_i}. $\square$

Definicja 4 Endomorfizm S przestrzeni liniowej W nazywamy *nilpotentnym*, jeśli istnieje liczba $q \in \mathbb{N}$, że $S^q = 0$ (to znaczy, $S^q(w) = 0$, dla każdego wektora $w \in W$). Najmniejszą liczbę $q_0 \in \mathbb{N}$, spośród wszystkich takich q, że $S^q = 0$ nazywamy *stopniem nilpotentności* odwzorowania S.

Zauważmy, że ograniczenie $R|V_0$, określonego wcześniej odwzorowania R jest odwzorowaniem nilpotentnym przestrzeni V_0 w siebie o stopniu nilpotentności nieprzekraczającym k_0.

Lemat 5 *Niech W będzie przestrzenią liniową o wymiarze s i niech $S \in \mathrm{End}(W)$ będzie odwzorowaniem nilpotentnym stopnia q. Istnieje baza uporządkowana $\mathbb{V}$, że macierz A_S odwzorowania S względem baz $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}$ jest macierzą Jordana z klatkami o wartości $\lambda = 0$. Każda klatka ma wymiary nieprzekraczające $q \times q$.*

Dowód. (indukcja ze względu na q) Jeśli $q = 1$, to $S = 0$ i macierz odwzorowania S względem każdej bazy jest macierzą zerową, więc jest macierzą Jordana o klatkach $J_1(0)$. Przypuśćmy teraz, że $q > 1$. Niech $W' = \operatorname{im} S$. Oczywiście W' jest podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania S. Ponadto $S' := S|W'$ jest odwzorowaniem nilpotentnym stopnia $q - 1$. Na mocy założenia indukcyjnego, istnieje więc baza uporządkowana $\mathbb{B}$ o wektorach

$$b_1^1, \ldots, b_{p_1}^1, \ldots, b_1^j, \ldots, b_{p_j}^j$$

przestrzeni W', że S' ma względem baz $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}$ postać Jordana o klatkach $J_{p_1}(0), \ldots, J_{p_j}(0)$. Równoważnie, każdy blok $b_1^i, \ldots, b_{p_i}^i$ wektorów bazy $\mathbb{B}$ zachowuje się pod działaniem S następująco:

$$S(b_1^i) = 0,\ S(b_2^i) = b_1^i, \ldots,\ S(b_{p_i}^i) = b_{p_i-1}^i.$$

Co więcej, $p_i \leqslant q - 1$. Ponieważ $b_{p_i}^i \in \operatorname{im} S$, więc istnieje wektor $b_{p_i+1}^i$, że $S(b_{p_i+1}^i) = b_{p_i}^i$. Utwórzmy układ $\mathbb{B}'$ wektorów:

$$b_1^1, \ldots, b_{p_1}^1, b_{p_1+1}^1, \ldots, b_1^j, \ldots, b_{p_j}^j, b_{p_j+1}^j.$$

Wektory tego układu są liniowo niezależne, bo jeśli

$$\alpha_1^1 b_1^1 + \cdots + \alpha_{p_1}^1 b_{p_1}^1 + \alpha_{p_1+1}^1 b_{p_1+1}^1 + \cdots + \alpha_1^j b_1^j + \cdots + \alpha_{p_j}^j b_{p_j}^j + \alpha_{p_j+1}^j b_{p_j+1}^j = 0, \tag{4}$$

to stosując S dostaniemy

$$\alpha_2^1 b_1^1 + \cdots + \alpha_{p_1+1}^1 b_{p_1}^1 + \cdots + \alpha_2^j b_1^j + \cdots + \alpha_{p_j+1}^j b_{p_j}^j = 0.$$

Ponieważ wektory układu $\mathbb{B}$ są liniowo niezależne, a tylko one występują w ostatniej równości, więc

$$\alpha_2^1 = \ldots = \alpha_{p_1+1}^1 = \ldots = \alpha_2^j = \ldots = \alpha_{p_j+1}^j = 0.$$

Stąd tożsamość (4) można przepisać tak

$$\alpha_1^1 b_1^1 + \cdots + \alpha_1^j b_1^j = 0.$$

Powtórnie korzystając z liniowej niezależności wektorów układu $\mathbb{B}$ wnioskujemy, że także współczynniki $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^j$ są zerami, co ostatecznie dowodzi liniowej niezależności wektorów układu $\mathbb{B}'$. Jeśli układ $\mathbb{B}'$ nie stanowi bazy przestrzeni V, to możemy go do bazy dopełnić; to znaczy, istnieją wektory $v^{j+1}, \ldots, v^k$, które dopisane do układu $\mathbb{B}'$ w postaci jednoelementowych bloków, utworzą wraz z nim bazę. Jednak nie każde wektory v^l dadzą nam taką bazę, że macierz endomorfizmu S względem baz $\mathbb{B}'$, $\mathbb{B}'$ będzie Jordana. Rozpatrzmy obraz $S(v^l)$. Ponieważ jest on elementem W', a $\mathbb{B}$ jest bazą przestrzeni W', więc $S(v^l)$ musi się przedstawiać jako kombinacja liniowa wektorów tej bazy:

$$S(v^l) = \alpha_1^1 b_1^1 + \cdots + \alpha_{p_1}^1 b_{p_1}^1 + \cdots + \alpha_1^j b_1^j + \cdots + \alpha_{p_j}^j b_{p_j}^j$$

Określmy nowe wektory b^l, $l = j+1, \ldots, k$

$$b^l = v^l - (\alpha_1^1 b_2^1 + \cdots + \alpha_{p_1}^1 b_{p_1+1}^1 + \cdots + \alpha_1^j b_2^j + \cdots + \alpha_{p_j}^j b_{p_j+1}^j)$$

Każdy wektor b^l jest jedynie modyfikacją v^l o wektor bedący kombinacją wektorów należących do układu $\mathbb{B}'$ zatem układ $\mathbb{V}$ powstały przez dopisanie do $\mathbb{B}'$ wektorów $b^{j+1}, \ldots, b^k$ pozostanie bazą przestrzeni W. Jednak na podstawie definicji b^l łatwo zauważyć, że $S(b^l) = 0$. Zatem każdy z wektorów b^l wyznacza w macierzy odwzorowania S blok $J_1(0)$. z kolei wektory $b_1^i, \ldots b_{p_i}^i, b_{p_i+1}^i$, $i = 1, \ldots, j$ wyznaczają bloki $J_{p_i+1}(0)$. Ponieważ żadna z liczb p_i nie przekracza $q-1$, więc $p_i + 1 \leqslant q$. Ostatecznie macierz endomorfizmu S względem baz $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}$ jest Jordana o klatkach, których wymiary nie przekraczają $q \times q$. □

Twierdzenie 6 (o rozkładzie Jordana) *Jeśli V jest przestrzenią skończonego wymiaru nad $\mathbb{C}$, $T \in \mathrm{End}(V)$, $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. V_{λ_i} są zdefiniowanymi wcześniej przestrzeniami niezmienniczymi, to*

(3) w każdej przestrzeni V_{λ_i} można znaleźć bazę uporządkowaną $\mathbb{B}_i$, że macierz A_i odwzorowania $T|V_{\lambda_i}$ jest w bazach $(\mathbb{B}_i, \mathbb{B}_i)$ Jordana; jej bloki $J_r(\lambda)$ mają wszystkie $\lambda = \lambda_i$;

(4) bazy opisane w (3) tworzą łącznie bazę uporządkowaną $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1, \ldots, \mathbb{B}_m$; macierz T względem baz $(\mathbb{B}, \mathbb{B})$ jest Jordana.

Dowód. Z (3) wynika natychmiast (4). Pozostaje więc dowieść (3). Jak pamiętamy, $R_i := T - \lambda_i E$, $i = 1, \ldots, m$, odwzorowują V_{λ_i} w V_{λ_i}. Ponadto odwzorowanie $R_i|V_{\lambda_i}$ jest nilpotentne. Zgodnie z lematem 5, istnieje baza uporządkowana $\mathbb{B}_i$, że macierz A_i odwzorowania $R_i|V_{\lambda_i}$ względem baz $(\mathbb{B}_i, \mathbb{B}_i)$ ma postać:

$$A_i = \begin{bmatrix} J_{n_{i1}}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_{ik_i}}(0) \end{bmatrix}$$

Ponieważ $T = R_i + \lambda_i E$, więc $T|V_{\lambda_i}$ będzie miało w bazach $(\mathbb{B}_i, \mathbb{B}_i)$ macierz

$$A_i + \lambda_i I = \begin{bmatrix} J_{n_{i1}}(\lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_{ik_i}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

□