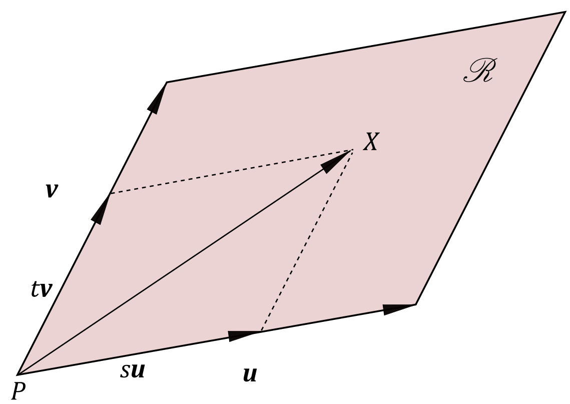
Geometria Lista 0

Zadanie 1. Wyznaczyć wzór na pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$: (a) nie odwołując się do współrzędnych tych wektorów; (b) odwołując się do współrzędnych względem odpowiednio dobranego układu.

Rozwiązanie. Przez równoległobok rozpięty na wektorach $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ rozumiemy podzbiór $\mathscr{R}$ płaszczyzny powstały w następujący sposób. Obieramy na płaszczyźnie jakikolwiek punkt P. Do zbioru $\mathscr{R}$ zaliczamy te wszystkie punkty X, które spełniają związek

$$\overrightarrow{PX} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$$

gdzie s i t są liczbami z przedziału $[0, 1]$ (patrz: rysunek 1).



Rysunek 1: Równoległobok $\mathscr{R}$ rozpięty na wektorach $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Z geometrii elementarnej wiemy, że pole równoległoboku $\mathscr{R}$ jest równe

$$|\mathscr{R}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\gamma,$$

gdzie γ, to kąt między wektorami $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Na podstawie geometrycznej definicji iloczynu skalarnego mamy:

$$|\mathscr{R}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2(1 - \cos^2\gamma) = \begin{vmatrix} |\boldsymbol{u}|^2 & \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle & |\boldsymbol{v}|^2 \end{vmatrix}.$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\operatorname{gram}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle & \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle & \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \end{vmatrix}.$$

Wtedy $|\mathscr{R}| = \sqrt{\operatorname{gram}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}$. W ten sposób wykonaliśmy część (a) zadania.

Załóżmy teraz, że w przestrzeni, w której leżą wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ wybrano uporządkowaną bazę ortonormalną $\mathbb{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ i związany z nią kartezjański układ współrzędnych. Wtedy $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + u_n\boldsymbol{e}_n$. Możemy teraz stworzyć wektor współrzędnych $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ wektora $\boldsymbol{u}$. Mamy oczywiście $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle u, v\rangle = u^{\mathsf{T}}v$. W takim razie

$$\operatorname{gram}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left|\begin{bmatrix} u^{\mathsf{T}} \\ v^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} [u, v]\right| = \left|[u, v]^{\mathsf{T}}[u, v]\right|.$$

Jeśli teraz wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ leżą w przestrzeni dwuwymiarowej, to mają wektory współrzędnych w $\mathbb{R}^2$ W szczególności, macierz $[u, v]$ jest 2×2 i ma wyznacznik. Jak wiemy, wyznacznik macierzy transponowanej musi być taki sam. Stąd

$$|\mathscr{R}| = \operatorname{abs}(|u, v|) = \operatorname{abs}\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\right) = \operatorname{abs}\left(\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right),$$

gdzie abs oznacza wartość bezwzględną.

Zadanie 2. Dano parę wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ w przestrzeni V z iloczynem skalarnym. Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na tych wektorach:

(0) $V = \mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{u} = (1, 5)$, $\boldsymbol{v} = (2, 3)$.

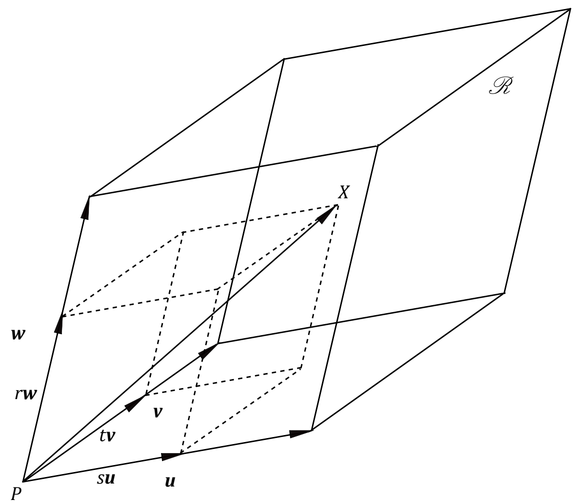
(1) $V = \mathbb{R}^3$; $\boldsymbol{u} = (0, 1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 1)$.

(2) $V = \mathbb{R}^5$; $\boldsymbol{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1, 2, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, -\sqrt{3}, 1, 2, 1)$

(3) $V = \mathbb{C}([0, 2\pi])$, iloczyn skalarny: $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{g}(x)\mathrm{d}x$; $\boldsymbol{u}(x) = 1 + \cos(x)$, $\boldsymbol{v}(x) = x^2$.

Zadanie 3. Niech $A(x_1, x_2), B(y_1, y_2), C(z_1, z_2)$ będą trzema punktami płaszczyzny z zadanym układem współrzędnych kartezjańskich. Niech $\triangle$ będzie trójkątem o wierzchołkach w tych trzech punktach. Wykaż prawdziwość następujących wzorów;

$$|\triangle| = \frac{1}{2}\operatorname{abs}\left(\begin{vmatrix} y_1 - x_1 & z_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 & z_2 - x_2 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{abs}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right).$$



Rysunek 2: Równoległościan.

Zadanie 4. Równoległościanem nazywamy zbiór punktów $\mathscr{R}$ przestrzeni trójwymiarowej, że istnieje punkt P i trzy liniowo niezależne wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ o tej własności, że

$$X \in \mathscr{R} \Longleftrightarrow \bigvee_{s,t,r\in[0,1]} \overrightarrow{PX} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + r\boldsymbol{w}.$$

(patrz rysunek 2). Na podobieństwo wzoru na pole równoległoboku, wyznaczyć wzór na objętość równoległościanu. A jak będzie wyglądał wzór na objętość czworościanu jeśli przyjąć, że znamy współrzędne jego wierzchołków?

Zadanie 5. Dano trójkę wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ w przestrzeni V z iloczynem skalarnym. Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego na tych wektorach:

(0) $V = \mathbb{R}^3$; $\boldsymbol{u} = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (2, 0, 1)$, $\boldsymbol{w} = (1, 2, 3)$.

(1) $V = \mathbb{R}^5$; $\boldsymbol{u} = (0, 1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{w} = (-2, 1, 2, -1, 1)$.

(2) $V = \mathbb{C}([0, 1])$, iloczyn skalarny: $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle = \int_0^1 \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{g}(x)\mathrm{d}x$; $\boldsymbol{u}(x) = 1 + x$, $\boldsymbol{v}(x) = x + x^2$, $\boldsymbol{w} = 1 + x^3$.

Dla każdego z równoległościanów wyznacz jego pole powierzchni.

Zadanie 6. W tym zadaniu elementy $\mathbb{R}^3$ uważamy za wektory wierszowe. Wykazać, że dla każdej pary wektorów $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, istnieje jedyny wektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$, że dla wszelkich $\boldsymbol{x}$ zachodzi równość

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Wektor $\boldsymbol{y}$ nazywamy *iloczynem wektorowym* wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i oznaczamy $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ bądź $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$. Wykazać, że iloczyn wektorowy nie jest łączny. Ponadto,

(0) Uzasadnić, że $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$;

(1) Znaleźć wzór na współrzędne wektora $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$

(2) Wykazać, że wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ są prostopadłe do $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

(3) Wykazać, że długość wektora $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ jest równa polu równoległoboku rozpiętgo na $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

(4) Wykazać tożsamość Jacobiego

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.$$

Zadanie 7. Niech V – przestrzeń euklidesowa. Wykazać, że wektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in V$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy ich wyznacznik Grama

$$\mathrm{gram}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m) = |[\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \rangle]|$$

jest niezerowy. ;

Zadanie 8. Niech $A \in \mathsf{M}_{\mathsf{m}\times\mathsf{n}}(\mathbb{R})$. Wykazać, że

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^{\mathsf{T}} A).$$

Zadanie 9. Dano układ wektorów liniowo niezależnych $\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_m$ w $\mathbb{R}^n$. Niech P oznacza projekcję ortogonalną (rzut prostopadły) na podprzestrzeń V rozpiętą na wektorach układu. Niech Q oznacza macierz, której kolumny Q^j są równe $\boldsymbol{u}_j$, $j = 1, \ldots, m$. Wykazać, że macierz A_P projekcji P względem $(\mathbb{B}, \mathbb{B})$, gdzie $\mathbb{B}$ oznacza bazę standardową ma postać:

$$A_P = Q(Q^{\mathsf{T}} Q)^{-1} Q^{\mathsf{T}}$$

Zadanie 10. Wymyślić definicję równoległościanu n-wymiarowego rozpiętego na wektorach $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$. Jak powinien wyglądać wzór na jego *objętość*?

Zadanie 11. Niech V i W – przestrzenie euklidesowe. Niech $T \in L(V, W)$. Odwzorowanie $T^* \in L(W, V)$ spełniające związek

$$\langle T(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, T^*(\boldsymbol{w})\rangle, \quad \text{dla wszelkich } \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W$$

nazywamy (euklidesowo) *sprzężonym* z T. Wykazać jego jedyność, a następnie udowodnić, że wyraża się ono wzorem:

$$T^*(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{m} \langle \boldsymbol{w}, T(\boldsymbol{e}_i)\rangle \boldsymbol{e}_i,$$

gdzie $(\boldsymbol{e}_i \colon i = 1, ..., m)$ jest jakąkolwiek bazą ortonormalną w V.

Zadanie 12. Niech V – przestrzeń euklidesowa. Dla $T \in \mathrm{End}\ (V)$, niech $T^* \in \mathrm{End}\ (V)$ oznacza endomorfizm sprzężony. Wykazać, że przekształcenie $T \mapsto T^*$ jest antyizomorfizmem; to znaczy, dla wszelkich $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, oraz wszelkich $S, T \in \mathrm{End}\ (V)$

- $(\alpha S + \beta T)^* = \alpha S^* + \beta T^*$;
- $(ST)^* = T^* S^*$.

Zadanie 13. Niech $U \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

(1) $U^{\mathsf{T}} U = I$;

(2) kolumny macierzy U tworzą bazę ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^n$;

(3) $U U^{\mathsf{T}} = I$;

(4) wiersze macierzy U stanowią bazę ortonormalną przestrzeni wektorów wierszowych $\mathbb{R}^{n*}$.

Zadanie 14. Niech W – podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej V. Niech P –rzut prostopadły (projekcja ortogonalna) przestrzeni V na W. Wykazać, że

(1) $P^2 = P$;

(2) $P^* = P$;

(3) jeśli $Q \in \mathrm{End}(V)$ spełnia warunki $(1-2)$, to jest rzutem prostopadłym na pewną podprzestrzeń

Wykazać ponadto, że jeśli $Q \in \mathrm{End}(V)$ spełnia warunki $(1-2)$, to jest rzutem prostopadłym na pewną podprzestrzeń.

Wyrazić projekcję ortogonalną na dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ za pomocą P.

Zadanie 15. Dwie podprzestrzenie U, W przestrzeni euklidesowej V nazywamy prostopadłymi (ortogonalnymi) jeśli dla każdej pary $u \in U$, $w \in W$ mamy $u \perp w$. Wykazać, że jeśli P jest rzutem prostopadłym na U, zaś R na W, to $PR = RP = 0$.

Zadanie 16. Jeśli T jest endomorfizmem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej V, λ i γ są różnymi wartościami własnymi, to podprzestrzenie własne V_λ i V_γ są prostopadłe. Przypomnijmy, że $V_\lambda = \{x \in V : T(x) = \lambda x\}$.

Zadanie 17. Niech $J \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ oznacza macierz, której wszystkie wyrazy są równe 1. Niech T będzie endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wyznaczonym przez macierz $J - I$. Znaleźć podprzestrzenie własne odwzorowania T. Wyznaczyć jego postać diagonalną oraz jego wyznacznik $\det T$